АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

5368—5919

*

№ 11 **1954**

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
РЕФЕРАТИВНОГО ЖУРНАЛА

В. В. Амаров, А. П. Лебедев, С. М. Никольский, К. Ф. Огородников, Д. Ю. Панов (председатель редколлегии), Л. И. Седов, В. В. Серпинский, Э. В. Шпольский

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 1
История математики. Биографии 3
Основания математики и математическая логика 5
Теория чисел 9
Алгебра 13
Многочлены и линейная алгебра 13
Группы 16
Поля, кольца и структуры 18
Топология 21
Теория функций действительного переменного 25
Теория множеств 27
Приближение функций полиномами и их обобщениями 29
Теория функций комплексного переменного . 35
Дифференциальные уравнения 45
Обыкновенные дифференциальные уравнения 45
Уравнения в частных производных . . . 50
Приложения к физике, технике и естественным наукам 54
Интегральные уравнения 65
Приложения интегральных уравнений . . 66
Вариационное исчисление 67
Анализ (другие вопросы) 68
Числовые ряды 69
Специальные функции 70
Интегральные преобразования и операционное исчисление 72
Приложения общих методов математического анализа 73
Функциональный анализ 75
Теория вероятностей 79
Математическая статистика 82
Теория игр 86
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов в технике . . . 87
Геометрия 89
Приложения геометрии 92
Проективная и начертательная геометрия 93
Алгебраическая геометрия 95
Дифференциалная геометрия трехмерного пространства 95
Геометрия n-мерного пространства. Теория относительности 97
Метрические методы в геометрии 100
Геометрия выпуклых многообразий . . . 102
Численные и графические методы 103
Таблицы 109
Алгебра электрических цепей . . . . . —
Вычислительные машины и математические приборы 110
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике 125
АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ . . . . . I—V

Адрес редакции: Москва, Д-219, Балтийский пос., д. 42-Б.

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*, УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ *М. К. Керимов*
РЕДАКТОРЫ ОТДЕЛОВ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, В. М. Курочкин, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, В. В. Немыцкий, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, С. П. Фиников, С. В. Фомин*

Рефераты 5368—5919 **№ 11** **Ноябрь 1954 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

5368. **XIII сессия Совета по координации научной деятельности академий наук союзных республик** (3—4 февраля 1954 года). Вестн. АН СССР, 1954, № 4, 13—44

Приводится обзор материалов сессии.

5369. **Перед новыми задачами. Купревич В. Ф.**, Вестн. АН СССР, 1954, № 2, 27—38

Статья президента Академии наук Белорусс. ССР о деятельности Академии наук Белоруссии.

5370. **Научная сессия, посвященная десятилетию Академии наук Узбекской ССР.** Изв. АН УзССР, 1954, № 1, 104—110

5371. **VIII съезд польских математиков. Куратовский, Мостовский** (VIII zjazd matematyków polskich (Warszawa, 6—12 września 1953). Kuratowski Kazimierz, Mostowski Andrzej), Nauka polska, 1954, 2, № 1, 147—151 (польск.)

5372. **Восьмой съезд польских математиков в Варшаве в 1953 г. Коржинек** (Osmý sjezd polských matematiků ve Varšavě 1953. Kořínek Vladimír), Časop. pěstov. mat., 1954, 79, № 1, 89—92 (чеш.)

5373. **Методико-дидактическая конференция математиков высших технических школ. Хампель** (Metodyczno-dydaktyczna konferencja matematyków wyższych szkół technicznych. Hampel Roman), życie szkoły wyższej, 1954, № 6, 109—111 (польск.)

5374. **Методико-дидактическая конференция математиков в Университете им. М. Кюри-Склодовской в Люблине. Белецкий** (Metodyczno-dydaktyczna konferencja matematyków na Uniwersytecie M. Curie-Skłodowskiej w Lublinie. Bielecki Adam), życie szkoły wyższej, 1954, № 6, 112—116 (польск.)

5375. **Международный съезд по дифференциальной геометрии в Италии. Наденик** (Mezinárodní sjezd diferenciální geometrie v Italii. Nádenik Zbyněk), Časop. pěstov. mat., 1954, **79**, № 1, 92 (чеш.)

5376. **Годичное собрание Германского математического объединения. Прахар** (Jahresversammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Mainz, 20.— 26. September 1953. Prachar K.), Internat. math. Nachr., 1953, 8, № 29/30, 12 (нем.)

5377. **Список членов Германского математического объединения по данным на 10 июня 1953 г.** (Verzeichnis der Mitglieder der Deutschen Mathematiker-Vereinigung nach dem Stande vom 10. Juni 1953), Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1953, 56, № 2—3, ч. 2, 77—87 (нем.)

5378. **Февральское собрание в Нью-Йорке** (The February meeting in New York), Bull. Amer. Math. Soc., 1953, 59, № 3, 231—248 (англ.)

Приведены краткие резюме докладов, представленных 489-му собранию Американского математического общества 28 февраля 1953 г.

5379. **Апрельское собрание в Нью-Йорке** (The April meeting in New York), Bull. Amer. Math. Soc., 1953, 59, № 4, 330—371 (англ.)

Приведены краткие резюме докладов, представленных 490-му собранию Американского математического общества 23—25 апреля 1953 г.

5380. **Апрельское собрание в Чикаго** (The April meeting in Chicago), Bull. Amer. Math. Soc., 1953, 59, № 4, 372—387 (англ.)

Приведены краткие резюме докладов, представленных 491-му собранию Американского математического общества 24—25 апреля 1953 г.

5381. **Майское собрание в Пало-Альто** (The May meeting in Palo Alto), Bull. Amer. Math. Soc., 1953, 59, № 4, 388—398 (англ.)

Приведены краткие резюме докладов, представленных 492-му собранию Американского математического общества 2 мая 1953 г.

5382. **Июньское собрание в Мизуле** (The June meeting in Missoula), Bull. Amer. Math. Soc., 1953, 59, № 5, 449—458 (англ.)

Приведены краткие резюме докладов, представленных 493-му собранию Американского математического общества 20 июня 1953 г.

5383. Октябрьское собрание в Нью-Йорке (The October meeting in New York), Bull. Amer. Math. Soc., 1954, **60**, № 1, 20—37 (англ.)

Приведены краткие резюме докладов, представленных 495-му собранию Американского математического общества 22—24 октября 1953 г.

5384. Ноябрьское собрание в Спартанберге (The November meeting in Spartanburg), Bull. Amer. Math. Soc., 1954, **60**, № 1, 45—58 (англ.)

Приведены краткие резюме докладов, представленных 496-му собранию Американского математического общества 27—28 ноября 1953 г.

5385. Ноябрьское собрание в Эванстоне (The November meeting in Evanston), Bull. Amer. Math. Soc., 1954, **60**, № 1, 59—74 (англ.)

Приведены краткие резюме докладов, представленных 497-му собранию Американского математического общества 27—28 ноября 1953 г.

5386. Ноябрьское собрание в Пасадине (The November meeting in Pasadena), Bull. Amer. Math. Soc., 1954, **60**, №*1, 75—84 (англ.)

Приведены краткие резюме докладов, представленных 498-му собранию Американского математического общества 28 ноября 1953 г.

5387. Годичное собрание в Балтиморе (The annual meeting in Baltimore), Bull. Amer. Math. Soc., 1954, **60**, № 2, 124—180 (англ.)

Приведены краткие резюме докладов, представленных 60-му годичному собранию Американского математического общества 28—30 декабря 1953 г.

5388. Второй конгресс математиков и физиков Югославии (II Kongres matematičara i fizičara FNRJ), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1953, **8**, № 2, 156 (хорв.)

5389. Относительно изложения теории действительных чисел на физико-математических факультетах педагогических институтов. Зуховицкий, Погребисский (Про викладання теорії дійсних чисел на фізико-математичних факультетах педагогічних інститутів. Зуховицький С. І., Погребисський Й. Б.). Наукові зап. Луцького пед. ін-та, сер. фіз-матем., 1953, № 1, 67—75 (укр.)

5390. Проблема научных кадров. Дью-Бридж (Scientific manpower problems. DuBridge Lee A.), Proc. Western Computer Conf., (Febr. 1953), New York, N. Y., 6—8 (англ.)

Отмечается в качестве одной из причин острого недостатка в научно-технических кадрах, что за последние 30 лет в средних школах США имело место значительное снижение уровня преподавания математики и физики. *В. И. Левин*

5391. Математическое образование в начальной и средней школе. Кэрнс (Elementary and secondary school training in mathematics. Cairns S. S.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 8, 523—527 (англ.)

Содержание доклада в Комитете школьных проблем штата Иллинойс. Указывается, что средняя школа в США весьма неудовлетворительно решает задачу подготовки учащихся как к занятиям в высшей школе, так и к практической деятельности после окончания средней школы. В результате студенты высших учебных заведений теряют, как правило, минимум год на повторение основных сведений из школьного курса математики, причем программы высших школ оказываются настолько перегруженными, что у студентов нет возможности для углубленных занятий, без которых высшее образование в полном смысле этого слова немыслимо. Приводятся следующие данные по двум группам студентов Иллинойского университета (234 и 268 человек): только 41% первой группы и 59% второй группы смогли вычислить 6% от 175 долларов; соответственно 34% и 55% смогли вычислить 7—6+2—4; 30% и 53% правильно расставили числа 0,40, 2,5 и 0,875 в порядке возрастания (студенты второй группы обучались на педагогическом факультете и являлись будущими учителями, программа по математике в школе у них была шире, они принимались в университет с большим отбором и на 77% состояли из студентов старших курсов). Указываются некоторые из причин, приведших к такому положению, и формулируются предложения, направленные на его улучшение. *В. И. Левин*

5392. Будущее математического образования в средней школе. Рив (The future of mathematics education in the secondary school. Reeve William David), School Sci. and Math., 1953, **53**, № 8, 611—631, 635—636 (англ.)

Подробно обсуждаются наиболее распространенные недостатки в системе математического образования в средних школах США: оторванность от простейших приложений, схоластичность (в особенности в преподавании алгебры и геометрии), несоответствие программ возрастным особенностям учащихся. Критикуются предложения, направленные на значительное сокращение часов, отводимых в школе на изучение математики. Выдвигаются следующие общие положения: учителя арифметики должны глубже знать свой предмет; будущие учителя должны быть вообще лучше подготовлены к преподаванию элементарной математики, а действующие — пройти переподготовку; учителя математики должны быть в некотором объеме знакомы с физикой; необходимо привлекать крупных ученых к разработке программ; учителя математики должны больше заниматься вопросами методики преподавания и изыскивать наиболее эффективные пути обучения; не следует, что широко практикуется, давать многочисленные примеры приложений аппарата элементарной математики, не устанавливая их связи с основными теоретическими положениями; учителя математики должны вести преподавание в тесном контакте с учителями других предметов; преподаватели математики в высших школах должны больше интересоваться преподаванием математики в средней школе и влиять на его постановку и т. п. *В. И. Левин*

5393 К. **О поготовке учителей математики в педагогических институтах. Левин В. И.,** 16 стр., Изд. Акад. пед. наук РСФСР, М., 1953, беспл.

5394 К. **Математические исследования в Индии. Банерджи** (Mathematical research in India. Banerji A. C., 43 pp., Indian Sci. Congr. Assoc. and Council Scient. and Industr. Res., Lahore, India, 1953), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 2, 135 (библ.)

5395 К. **Каталог математических изданий Математического института Польской академии наук, Польского математического общества и Государственного научного издательства 1945—1953 гг.** (Katalog wydawnictw matematycznych Instytut Matematycznego Polskiej Akademii Nauk, Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Panstwowego Wydawnictwa Naukowego, 1945-1953, Wyd. I, 14 s., 2nlb., Panstw. Wydawn. Nauk., Warszawa, 1953), Przew. bibliogr., 1953, **9** (**21**), № 42, 548 (библ.)

5396 К. **Основные идеи математики. Ланкфорд, Кларк** (Basic ideas of mathematics. Lankford Francis G., Jr, Clark J. R., World Book Co., Yonkers-on-Hudson, New York, 1953, 2.84 doll.), School Sci. and Math., 1953, **8**, № 7, 578 (библ.)

5397 К. **Элементарная математика с точки зрения высшей. Арифметика, алгебра, анализ. Клейн** (Elementary mathematics from an advanced standpoint. Arithmetic-algebra-analysis. Klein Felix, translated by E. R. Hedrick and C. A. Noble, IX + 274 pp., Dover Publications, Inc., New York, N. Y., 1953, 3.25 doll.)

Фото-офсетная перепечатка с ранее опубликованного оригинала (Macmillan, New York, 1932).
Перевод из Math Rev., 1953, **14**, № 11, 1068.

5398 К. **Математика для всех. Хогбен** (Mathematik für alle. Hogben Lancelot, 736 S., Kiepenheuer and Witsch., Köln, Berlin, 1953, 16.70 DM), Schweiz. Buchhandel., 1954, **12**, № 2, 54 (библ.)

5399 К. **Математические часы досуга. Собрание головоломок, фокусов и развлекательных задач математического характера. Шуберт** (Mathematische Mussestunden. Eine Sammlung von Geduldspielen, Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur. Schubert Hermann, II. Aufl., 271 S., Walter de Gruyter und Co., Berlin, 1953, 7.20 DM), J. reine und angew. Math., 1953, **192**, № 2, обл. стр. 4 (библ.)

5400 К. **Люди математики. Белл** (Men of mathematics. Reprint in two volumes. Bell E. T., 646 pp., Pelican Books, 1953, 2s. 6d. each part), Math. Gaz., 1953, **37**, № 322, 320 (библ.)

5401 РЕЦ. **Математический калейдоскоп. Штейнхаус** (Matematický kaleidoskop. Steinhaus Hugo, 125 str., Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1953, 28 Kčs.) [**Рецензия:** Седлачек (Sedláček Jiří), Časop. pěstov. mat., 1953, **78**, № 4, 366—368 (чеш.)]

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

5402. **Спорные вопросы из истории арифметики в этнологическом и психологическом освещении. Фетвейс** (Streitfragen aus der Geschichte der Arithmetik in ethnologischer und psychologischer Beleuchtung. Fettweis Evvald), Scientia (Asso), 1953, **88**, № 497, 235—249 (нем.)

5403. **О найденной рукописи Парижского трактата Абеля. Брун** (Det gjenfunne manuskript til Abels Parisavhandling. Brun Viggo), Nord. mat. tidskr., 1953, **1**, № 2—3, 91—97; 143—144 (норв.; резюме англ.)

Рукопись трактата Абеля «Об одном общем свойстве некоторого весьма обширного класса трансцендентных функций», представленного Парижской академии наук 30 октября 1826 г., во время прохождения корректур (1841 г.) была объявлена Либри (G. Libri) потерянной. Автор заметки обнаружил оригинал рукописи в Biblioteca Moreniana во Флоренции. *Л. А. Стебакова*

5404. **Критика Беркли бесконечно малых. Уиздом** (Berkeley's criticism of the infinitesimal. Wisdom J. O.), Brit. J. Phylos. Sci., 1953, **4**, № 13, 22—25 (англ.)

Статья новых сведений не содержит. Желая представить правыми обоих — и Беркли, и Ньютона, автор трактует критику Беркли как направленную только против употребления Ньютоном бесконечно малых (актуальных), точку же зрения Ньютона — как основанную на интуитивном приближении к понятию предела. *С. А. Яновская*

5405. **Жизнь и деятельность Яноша Бойаи. Алексич** (Bolyai János élete és munkássága. Alexits György), A magyar tudomán. akad. Mat. es fiz. osztályának közlemenyei, 1953, **3**, № 2, 131—150 (венг.)

Доклад на сессии Венгерской академии наук (14 декабря 1952 г.), посвященной знаменитому венгерскому математику Яношу Бойаи (1802—1860). Приводятся интересные выдержки из неопубликованных материалов о Бойаи и самого Бойаи, а также делается попытка осветить его творчество с точки зрения диалектического материализма.

На основании отрывков из подготовлявшегося Я. Бойаи сочинения «Учение о благе» (оно не было закончено) делается вывод о близости взглядов Бойаи к учению социалистов-утопистов. Однако Б. Фогарши считает это утверждение Алексича спорным (см. реф. 5419 РЕЦ). В докладе приводятся отдельные философские высказывания Я. Бойаи, из которых выводится заключение, что Бойаи был рационалистом, склонявшимся к материализму.

Попытка объяснить интерес Н. И. Лобачевского к развитию дифференциально-аналитического аппа-

рата неевклидовой геометрии тем обстоятельством, что Лобачевский имел возможность воспользоваться астрономическими наблюдениями для проверки того, какова природа физического пространства, представляется референту неубедительной. Неубедительно также объяснение устремления Бойаи в сторону геометрических построений тем, что в его распоряжении находились только бумага и карандаш. Спорны и некоторые другие положения доклада.

Большой интерес представляют отрывки из исследований Бойаи по теории высших комплексных чисел и по топологии кривых и поверхностей. Было бы очень желательно, чтобы все сохранившиеся отрывки из соответствующих работ Яноша Бойаи были полностью опубликованы.

И. Г. Башмакова

5406. Великий математик Янош Бойаи. Тот (Un mare matematician Ianoș Bolyai. Toth E.), Ştiinţă şi cultura, 1954, **6**, № 1, 20—21 (рум.)

Краткий очерк жизни и научного творчества знаменитого венгерского математика Я. Бойаи.

5407. О новом издании «Аппендикса». Варга (Az «Appendix» új kiadásának ismertetése. Varga Ottó), A magyar tudomán. akad. Mat. és fiz. osztályának közleményei, 1953, **3**, № 2, 281—283 (венг.)

Реферируемая статья представляет собой рецензию на новое издание «Аппендикса» Яноша Бойаи. Новое издание содержит оригинальный латинский текст и венгерский перевод «Аппендикса», высоко оцениваемый автором, а также ценный исторический и математический комментарий.

М. Я. Выгодский

5408. Якопо Барокци да Виньола в истории перспективы. Казотти (Iacopo Barozzi da Vignola nella storia della prospettiva. Casotti Maria Walcher), Period. mat., 1953, сер. 4, **31**, 73—103 (итал.)

Перевод из Math. Rev., 1954, **15**, № 2, 89.

5409. Вацлав Главатый. Трусделл (Václav Hlavatý. Truesdell C.), Internat. math. Nachr., 1953, **8**, № 29/30, 2—4 (англ.)

Краткий очерк научной деятельности и творчества геометра В. Главатого (к 60-летию со дня рождения).

5410. Работа В. П. Ермакова по векторной алгебре. Из истории математики. Потапов В. С., Уч. зап. Сталингр. гос. пед. ин-та, 1953, № 3, 3—8

Дается краткий обзор одного из наиболее ранних учебников по векторной алгебре, включающего приложения к аналитической геометрии (Ермаков В. П., Теория векторов на плоскости. Приложение к исследованию конических сечений, Киев, 1887). Приводятся также краткие биографические сведения об авторе учебника — известном профессоре Киевского университета. Ошибочно указан год смерти В. П. Ермакова: 1921 г. вместо 1922 г.

В. Ф. Рогаченко

5411. Коперник и Симон Стевин. Жерло (Copernic et Simon Stevin. Gerlo A.), Ciel et terre, 1953, 69, № 11—12, 277—288 (франц.)

Статья посвящена вопросу о связях, существующих между бессмертным произведением Коперника и трудами выдающегося нидерландского математика, физика и инженера Симона Стевина (1548—1620). Автор отмечает, что в 1605—1608 гг. (до выхода в свет сочинений Кеплера), Стевин изложил систему Коперника на голландском языке в своем труде «Wisconstighe Ghedachtenissen», который появился одновременно в латинском и французском (неполном) переводах. При этом он внес в теорию Коперника некоторые усовершенствования. Документы, приводимые автором, показывают, что открытое признание гелиоцентрической системы мира было далеко небезопасно и в Нидерландах. Сторонники кальвинизма не менее рьяно, чем католики, обрушивались на теорию, которая «приводит к обвинению во лжи святого духа». Симон Стевин из-за своего открытого признания взглядов Коперника не смог получить место профессора в Лейденском университете, которое было предоставлено Снеллиусу, высказывавшемуся против гелиоцентрической системы.

И. Г. Башмакова

5412. К тридцатой годовщине смерти чешского математика Матиаша Лерха. Франк Людвик, Чехосл. матем. ж., 1953, **3**, № 2, 109—110

Приводятся краткие биографические сведения и обзор научной деятельности известного чешского математика проф. М. Лерха (см. также РЖМат, 1954, 5024).

5413. Джино Лория (Некролог). Тольятти (Gino Loria (Necrologio). Togliatti E.), Boll. Unione mat., ital., 1954, **9**, № 1, 115—118 (итал.)

Краткий очерк жизни и научной деятельности итальянского математика Джино Лория (родился 19 мая 1862 г., скончался 30 января 1953 г.).

5414. Математические труды Анри Пито. Эмбер (L'oeuvre mathématique d'Henri Pitot. Humbert Pierre), Rev. histoire sci., 1953, **6**, № 4, 322—328 (франц.)

Биографические сведения об А. Пито (1695—1771) и краткая характеристика его научных трудов по астрономии, геометрии и гидравлике.

5415. Шестьдесят лет академика Эдуарда Чеха. Новак Й., Вычихло Ф., Зелинка Р., Чехосл. матем. ж., 1953, **3**, № 2, 183—198

Излагается биография акад. Э. Чеха — выдающегося чехословацкого математика, директора Математического института Чехословацкой академии наук и профессора Карлова университета. Подробно освещается его научная, педагогическая и общественная деятельность.

К статье приложен список научных работ акад. Э. Чеха (см. также РЖМат, 1954, 3941).

5416. Чехословацкая государственная премия за 1953 г. Чехосл. матем. ж., 1953, **3**, № 3, 297

Сообщается о присуждении премии и присвоении звания «Лауреат государственной премии» чехословацкому математику Мирославу Катетову за работу «О размерности несепарабельных пространств *I*».

5417 К. Александр Михайлович Ляпунов. Лукомская А. М. Библиография. Под ред. акад. Смирнова В. И., 268 стр., 4 портрета, Изд-во АН СССР, М.— Л., 1953, 8 р. 20 к.

В первом разделе опубликованы вводные статьи: В. И. Смирнов «Очерк жизни А. М. Ляпунова; В. И. Смирнов «Обзор научного творчества А. М. Ляпунова»; Н. П. Еругин «Обзор работ советских математиков по теории устойчивости движения». Второй раздел составляет аннотированный библиографический указатель, насчитывающий 285 названий. Он состоит из следующих разделов: работы А. М. Ляпунова, опубликованные в печати; материалы о жизни и деятельности А. М. Ляпунова; основные работы советских математиков по теории устойчивости движения. В третьем разделе опубликованы вспомогательные указатели, в том числе систематический указатель к научным трудам А. М. Ляпунова. *С. А. Шорыгин*

5418 К. Н. И. Лобачевский. Тарджеманов Дж. А., 132 стр., илл. (на татарск. яз.), Татгосиздат, Казань, 1953, 3 р. 95 к.

5419 РЕЦ. Жизнь и деятельность Яноша Бойаи. Алексич (Bolyai János élete és munkássága. Alexits G.) [**Рецензия: Картеси** (Kárteszi Ferenc), A magyar tudomán. akad. Mat. és fiz. osztalyanak közleményei, 1953, **3**, № 2, 289—291 (венг.)]

Автор отмечает, что Д. Алексич хорошо справился с трудной задачей изложения творчества Яноша Бойаи для читателей, незнакомых с математикой. Д. Алексич сумел воссоздать истинный образ Яноша Бойаи, который был совершенно искажен буржуазной историографией, стремившейся представить пламенные выступления Бойаи за справедливость, как результат его раздражительного и неуживчивого характера. Утверждение Д. Алексича о близости взглядов Бойаи к учению социалистов-утопистов вызвало возражения со стороны Б. Фогарши. Для окончательного решения вопроса надо привлечь хранимое в Марошвашархейе литературное наследие Бойаи, которое заслуживает основательного изучения. *И. Г. Башмакова*

5420 РЕЦ. История науки. Истоки и результаты революции в науке. Сборник статей (The history of science. Origins and results of the scientific revolution. A symposium, 184 pp., Cohen and West Ltd., London, 1951; the Free Press, Glencoe, Ill., 1951, 2.50 doll) [**Рецензия: Дибнер** (Dibner Bern), Scpirta math., 1953, **19**, № 1, 45—48 (англ.)]

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

5421. К непротиворечивости некоторой логики без типов. Шютте (Zur Widerspruchsfreiheit einer typenfreien Logik. Schütte Kurt), Math. Ann., 1953, **125**, № 4, 394—400 (нем.)

Автор строит логическое исчисление, не содержащее импликации и имеющее те же аксиомы, что и исчисление Аккермана (РЖМат, 1953, 547). Алфавит исчисления состоит из свободных переменных $(a, b, \ldots)$, связанных переменных $(x, y, \ldots)$, специальных констант $(\varphi, \psi, \ldots)$, знака абстракции λ, логических знаков $\vee$, $^-$, E и скобок. Понятия «терм» и «формула» определяются одновременной рекурсией:

1. a) Каждая свободная переменная и каждая специальная константа является термом;

b) Если $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n)$ — формула, не содержащая связанных переменных $x_1, \ldots, x_n$, то $\lambda_{x_1 \ldots x_n} \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)$ — терм.

2. a) Если $\mathfrak{F}, t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $\mathfrak{F}(t_1, \ldots, t_n)$ — формула;

b) Если $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — формулы, то $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ — формула;

c) Если $\mathfrak{A}$ — формула, то и $\overline{\mathfrak{A}}$ — формула;

d) Если $\mathfrak{A}(a)$ — формула, в которую не входит связанная переменная x, то $(Ex)\mathfrak{A}(x)$ — формула.

Термы без свободных переменных называются постоянными. Некоторые формулы вида $\varphi(a_1, \ldots, a_m)$ и $\overline{\psi}(b_1, \ldots, b_n)$, где φ, ψ — специальные константы, а $a_1, \ldots, a_m$, $b_1, \ldots, b_n$ — постоянные термы, принимаются в качестве аксиом, причем единственное условие, налагаемое на выбор аксиом, состоит в том, чтобы не существовало пары аксиом вида $\varphi(a_1, \ldots, a_m)$ и $\overline{\varphi}(a_1, \ldots, a_m)$.

Правила вывода следующие:

1. a) Члены дизъюнкции $\mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_n$ могут быть любым образом переставлены;

$$\text{b)}\ \frac{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{A} \vee \mathfrak{N}}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{N}};\quad \text{c)}\ \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{N}}.$$

$$2.\ \text{a)}\ \frac{\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{N} \quad \overline{\mathfrak{B}} \vee \mathfrak{N}}{\overline{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \vee \mathfrak{N}};\quad \text{b)}\ \frac{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{N}}{\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \vee \mathfrak{N}}.$$

$$3.\ \text{a)}\ \frac{\mathfrak{A}(t) \vee \mathfrak{N}}{(Ex)\mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{N}};\quad \text{b)}\ \frac{\overline{\mathfrak{A}}(a) \vee \mathfrak{N}}{\overline{(Ex)\mathfrak{A}(x)} \vee \mathfrak{N}}.$$

$$4.\ \text{a)}\ \frac{\mathfrak{A}(t_1, \ldots, t_n) \vee \mathfrak{N}}{[\lambda_{x_1 \ldots x_n}\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)](t_1, \ldots, t_n) \vee \mathfrak{N}};$$

$$\text{b)}\ \frac{\overline{\mathfrak{A}}(t_1, \ldots, t_n) \vee \mathfrak{N}}{\overline{[\lambda_{x_1 \ldots x_n}\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)]}(t_1, \ldots, t_n) \vee \mathfrak{N}}$$

$$5.\ \text{Сечение:}\ \frac{\mathfrak{M} \vee \mathfrak{A} \quad \overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{N}}{\mathfrak{M} \vee \mathfrak{N}}.$$

6. Бесконечная индукция: Если $\mathfrak{A}(c_1, \ldots, c_n)$ выводимо для всех постоянных термов $c_1, \ldots, c_n$, то выводимо $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n)$ со свободными переменными $a_1, \ldots, a_n$.

Закон исключенного третьего в его общей формулировке в этой системе отсутствует, однако он, как утверждает автор, имеет силу по крайней мере

для разветвленной теории типов, содержащейся в рассматриваемой системе.

Применение правил 1—4 и 6, по утверждению автора, не должно привести к противоречию. Рядом теорем приведения доказывается, что всякая формула, полученная применением сечения 5, может быть выведена и без правила 5. Средством доказательства служит трансфинитная индукция по числу применений правил вывода.

В. К. Детловс

5422. Некоторые соображения относительно рекурсивных функций. Сколем (Some considerations concerning recursive functions. Skolem Th.), Math. scand., 1953, **1**, № 2, 213—221 (англ.)

1. Пусть $g(x, y, z)$ — общерекурсивная функция (о. р. ф.) такая, что последовательность $g(x, y, 0)$, $g(x, y, 1), \ldots$ состоит из всех примитивно рекурсивных функций (п. р. ф.) двух аргументов. Через $H(x, z)$ обозначается предикат $(Ey)(g(x, y, z) = 0)$. Тогда класс $H(x, f(x))$ является рекурсивно перечислимым, но не является рекурсивным; здесь $f(x)$ — функция, принимающая все натуральные значения (например, $f(x) = x$).

2. Опираясь на известную теорему о том, что непустое рекурсивно перечислимое множество перечислимо также и примитивно рекурсивной функцией, автор показывает, что для любой о. р. ф. $f(x_1, \ldots, x_n)$ существуют п. р. ф. $h_i(t)$ такие, что $f(h_1(t), \ldots, h_n(t)) = 0$ для всех t, и из $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ следует, что при некотором t $h_i(t) = x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, если $(Ex_1) \ldots (Ex_n) f(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

3. Высказывается мысль, что рекурсивная арифметика может быть построена при помощи п. р. ф. без явного использования о. р. ф. Показывается, как из формулы, содержащей общерекурсивную функцию $\varphi(x, y)$, эта функция может быть исключена за счет введения вспомогательной п. р. ф., если предикат $z = \varphi(x, y)$ примитивно рекурсивный.

4. Так называемая первая теорема Гёделя о невыводимости утверждает, что в формальном исчислении, содержащем рекурсивную арифметику, может быть построена п. р. ф. $\mathfrak{F}$ такая, что формула $\mathfrak{F}(a) = 0$ выводима для каждой цифры a, но формула $\mathfrak{F}(a) = 0$ с переменным a невыводима. Отмечается, что принципиально возможно существование другой функции f такой, что $f(a) = \mathfrak{F}(a)$ для каждого a, и $f(a) = 0$ выводимо для переменного a, но $f(a) = \mathfrak{F}(a)$ невыводимо. Примеры не приводятся.

5. Автором было доказано, что в нормальной форме о. р. ф. $\psi(\mu y R(x_1, \ldots, x_n))$ в качестве внешней функции ψ всегда может быть взята некоторая фиксированная п. р. ф. $\tau_2(y)$ (Skolem Th., Norsk mat. tidsskr., 1946, 1—12). Марков доказал, что в качестве ψ можно взять любую функцию большого размаха, т. е. функцию, которая принимает каждое число в качестве значения бесконечно много раз (Марков А. А., Докл. АН СССР, 1947, 58, № 9, 1891—1892). Показывается, как видоизменением первого доказательства автора может быть доказана теорема Маркова.

6. Доказывается, что каждая о. р. ф. y одного аргумента может быть записана в виде

$$y = \psi(\mu t(x\ f(t))) \qquad (1)$$

для некоторых п. р. ф. ψ и f, причем f принимает все натуральные значения. Автор говорит: «Вероятно, необходимым и достаточным условием для того, чтобы ψ могло представить о. р. ф. от x в виде (1) с некоторой п. р. ф. f, снова является то, что ψ есть функция большого размаха, но я этого не исследовал».

В. К. Детловс

5423. Перестановка в рекурсивной арифметике. Гудстейн (Permutation in recursive arithmetic. Goodstein R. L.), Math. scand., 1953, **1**, № 2, 222—226 (англ.)

При рекурсивном определении суммы натуральных чисел перестановочный закон является теоремой, доказательство которой для каждого фиксированного числа слагаемых может быть проведено аналогично доказательству равенства $a + b = b + a$, данному Дедекиндом (Dedekind R., Was sind und was sollen die Zahlen, Braunschweig, 1888). Автор доказывает, что сумма переменного числа слагаемых не меняется ни при какой перестановке слагаемых. При этом слагаемые предполагаются значениями некоторой примитивно рекурсивной функции и перестановка строится как последовательность транспозиций, определяемая примитивно рекурсивными функциями.

Имеется опечатка: на стр. 222, 3 строка снизу, вместо $\operatorname{sg}((q + 1 \dot{-} p)\tau(p, q \dot{-} p))$ должно быть $\operatorname{sg}(q + 1 \dot{-} p) \cdot \tau(p, q \dot{-} p)$.

В. К. Детловс

5424. К определению упорядоченной пары множеств любой ступени. Швабхёйзер (Zur Definition des geordneten Paares von Mengen beliebiger Stufe. Schwabhäuser Wolfram), Math. Nachr., 1954, **11**, № 1—2, 81—84 (нем.)

Показана возможность определения в теории типов упорядоченных пар любых элементов (хотя бы разных типов). Автор отправляется от принципа Куратовского, по которому упорядоченная пара $[a, b]$ определяется как множество $\{\{a, b\}, \{a\}\}$. $g(i, k)$ обозначает однозначно обратимую функцию, определенную на множестве натуральных чисел и удовлетворяющую условию $g(i, k) \geqslant \max(i, k) + 2$. $\mathfrak{K}_m$ есть символ повышения ступени, причем

$$\mathfrak{K}_0 A^i = A^i, \quad \mathfrak{K}_{n+1} A^i = \{\mathfrak{K}_n A^i\},$$

где A^i обозначает множество ступени i. Упорядоченная пара $[A^i, B^k]$ определяется как множество

$$\mathfrak{K}_{g(i,\ k)-\max(i,\ k)-2}\{\{\mathfrak{K}_{k \dot{-} i} A^i, \mathfrak{K}_{i \dot{-} k} B^k\}, \{\mathfrak{K}_{k \dot{-} i} A^i\}\},$$

где $k \dot{-} i$ обозначает арифметическую разность чисел k и i при $k \geqslant i$ и 0 в противном случае. Так определенное множество обладает основным свойством упорядоченной пары: если $[a, b] = [c, d]$, то $a = c$, $b = d$.

Далее обычным образом можно определить упорядоченные тройки, четверки и т. д., пользуясь при $n > 2$ формулой

$$[A_1^{i_1}, A_2^{i_2}, \ldots, A_n^{i_n}] = [A_1^{i_1}, [A_2^{i_2}, \ldots, A_n^{i_n}]].$$

Так как теория типов изоморфна ступенчатому исчислению математической логики, то введенные упорядоченные пары интересны также с точки зрения последнего.

Б. С. Содномов

5425. *M*-значное исчисление непротиворечивости. Рез (The *M*-valued calculus of non-contradiction. Rose Alan), J. Symbolic Logic, 1953, **18**, № 3, 237—241 (англ.)

Дается обобщение исчисления непротиворечивости, построенного для 2-значной логики Декстером, на m-значную логику с одним выделенным значением.

Рассматривается система с бесконечным числом примитивных функций $n(P_1, P_2, \ldots, P_r)$ $(r=1,2,\ldots)$. $n(P_1, P_2, \ldots, P_r)$ имеет то же значение, какое при обычных обозначениях имеет $\sim(P_1 \& P_2 \& \ldots \& P_r)$ (при этом $n(P)$ есть просто отрицание $\sim P$); $n^2(P_1, P_2, \ldots, P_r)$ означает $n(n(P_1, P_2, \ldots, P_r))$ — и аналогично для более высоких степеней n.

Определения $P \& Q$, $N(P)$, $N(P, Q)$, $P \to Q$:

$$P \& Q =_{\text{df}} n^m(P, Q);$$

$$N(P) =_{\text{df}} n(P, n(P), \ldots, n^{m-2}(P));$$

$$N(P, Q) =_{\text{df}} n(P, Q, n(P), n(Q), \ldots, n^{m-2}(P), n^{m-2}(Q));$$

$$P \to Q =_{\text{df}} N(P, N(Q)).$$

Система предложений называется противоречивой, если она содержит предложения вида $n^i(P_1, P_2, \ldots, P_r)$ $(1 \leqslant i \leqslant m-1)$, $n^{i_1}(P_1)$, $n^{i_2}(P_2)$, $\ldots$, $n^{i_r}(P_r)$, где для $1 \leqslant s \leqslant r$ $i_s = 0$ или $i+1 \leqslant i_s \leqslant m-1$; или содержит для некоторого s $(1 \leqslant s \leqslant r)$ предложения вида $n^i(P_1, P_2, \ldots, P_r)$ $(1 \leqslant i \leqslant m-1)$, $n^j(P_s)$, где $1 \leqslant j \leqslant i-1$. Вводится новое понятие. Пусть X — класс предложений. Скобка R нейтральна относительно X, если присоединение R, или $n(R)$, или ... или $n^{m-2}(R)$ к X дает противоречие.

Суждение называется утверждением исчисления, если оно встречается в скобках, которые нейтральны относительно пустого класса суждений.

Далее доказываются правила и теоремы. Идея доказательства правил состоит в том, что выбираются испытываемые скобки, которые, с одной стороны, содержат доказываемое суждение, с другой стороны, образуют противоречие с данной гипотезой. Вместе с тем испытываемые скобки должны образовывать систему, нейтральную относительно пустого класса суждений. Отсюда делается заключение об утверждении следствия на основании гипотезы. Таким образом, на основании статьи можно утверждать, что с помощью установленного исчисления происходит обобщение доказательства от противного на m-значные логики с одним выделенным значением.

Автор обосновывает функциональную и дедуктивную полноту исчисления. С этой целью показывается выводимость в этой системе аксиом каждой аксиомы B1—B6 (Rosser J. B., Turquette A. R., J. Symbolic Logic, 1949, **14**, 219—225), а также правила modus ponens. *Т. Л. Майстрова*

5426. О связи между современной алгеброй и математической логикой. Хенкин (Some interconnections between modern algebra and mathematical logic. Henkin Leon), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, **74**, № 3, 410—427 (англ.)

Автор рассматривает некоторые приложения математической логики к абстрактной алгебре. С этой целью вводится в рассмотрение язык L, являющийся логическим исчислением первой ступени, содержащим постоянные индивидуумы (область индивидуумов есть D), знаки алгебраических операций «+», «·» и знак «=»; впрочем, как автор сам отмечает (стр. 417), вместо операций «+» и «·», а также наряду с ними, могут быть и другие. Некоторые формулы из L объявляются аксиомами, правила вывода обычны.

Используя естественное определение понятий модели и интерпретации (последняя состоит в указании модели, т. е. некоторой области индивидуумов и выбора значения для каждого постоянного символа), автор отправляется от следующего доказанного им предложения:

(H) Пусть Γ — множество формул из L такое, что каждое конечное подмножество Γ выполнимо. Тогда существуют интерпретации, удовлетворяющие Γ, в которых область D имеет мощность, не превосходящую мощности множества символов из L.

Пусть S — формула из L; $\boldsymbol{P}_S$ означает класс моделей, удовлетворяющих S; определенные таким образом классы $\boldsymbol{P}_S$ автор называет арифметическими классами; если же формулу S заменить в этом определении множеством формул, то полученный класс моделей автор называет квазиарифметическим. Дополнение квазиарифметического, но не арифметического класса, не может быть квазиарифметическим. Автор устанавливает следующие теоремы (термин $\boldsymbol{P}$-модель означает модель их квазиарифметического класса $\boldsymbol{P}$):

Теорема 1. Пусть $\boldsymbol{P}$ — квазиарифметический класс, D — бесконечная модель. Для того чтобы D имело расширение E, являющееся $\boldsymbol{P}$-моделью, необходимо и достаточно, чтобы каждое конечное подмножество D было изоморфно некоторому подмножеству $\boldsymbol{P}$-модели. При этом можно предполагать, что мощность E равна мощности D.

Теорема 2. Пусть M — бесконечная модель из квазиарифметического класса $\boldsymbol{P}$, пусть α — кардинальное число большее или равное мощности M; тогда $\boldsymbol{P}$ содержит собственное расширение модели M, имеющее мощность α.

Теорема 3. Если квазиарифметический класс $\boldsymbol{P}$ содержит модели произвольно большой конечной мощности, то он содержит также бесконечную модель.

Теорема 4. Пусть $\mathfrak{S}$ — бесконечное семейство непересекающихся арифметических классов $\boldsymbol{C}_i$, $\boldsymbol{Q}$ — объединение всех $\boldsymbol{C}_i$, $\overline{\boldsymbol{Q}}$ — дополнение $\boldsymbol{Q}$. Если $\boldsymbol{P}$ — квазиарифметический класс, пересекающийся с бесконечно многими $\boldsymbol{C}_i$, то $\boldsymbol{P}$ пересекается и с $\overline{\boldsymbol{Q}}$.

Теорема 5. Пусть, в условиях теоремы 4, $\boldsymbol{A}$ есть модель, любое конечное множество элементов которой может быть погружено в пересечение $\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{C}_i$ для бесконечно многих $\boldsymbol{C}_i$; тогда в пересечении $\boldsymbol{P} \cap \overline{\boldsymbol{Q}}$ содержится расширение $\boldsymbol{A}$.

С помощью теоремы 1 доказывается, что каждое булево кольцо R изоморфно некоторому кольцу множеств, и притом если R бесконечно, то эти множества могут быть выбраны так, что мощность их объединения не превосходит мощности R; также доказывается известная теорема о представлении дистрибутивных структур.

Другое применение теоремы 1: пусть $\mathbf{Q}$ — арифметический (квазиарифметический) класс и все конечные $\boldsymbol{Q}$-модели обладают арифметическим (квази-

арифметическим) свойством P; тогда каждая Q-модель может быть расширена до P-модели при условии, что каждое конечное множество элементов любой Q-модели изоморфно множеству элементов некоторой конечной Q-модели. Это условие выполняется, например, для арифметического класса Q всех абелевых групп, откуда: всякий арифметический (квазиарифметический) класс P, содержащий все конечные абелевы группы, содержит расширение любой абелевой группы.

Из теоремы 4 вытекает, что если существуют поля характеристики p_i с квазиарифметическим свойством P для бесконечно многих простых чисел p_i, то существует и поле характеристики 0 со свойством P. Из теоремы 5 вытекает, что если квазиарифметический класс P содержит каждое поле простой характеристики q_i для бесконечно многих i, то P содержит расширение любого поля характеристики нуль.

Пусть G — бесконечная группа с конечным числом образующих, K_i — конечное множество элементов G, порядки которых $\leqslant i$, $i = 1, 2, \ldots$, P — квазиарифметический класс и K_i для каждого i может быть расширено до P-группы G_i; тогда и G может быть расширено до P-группы; если при этом G_i могут быть получены без присоединения к K новых элементов порядка $\leqslant i$, то все новые элементы расширения G имеют конечный порядок.

В последней части автор рассматривает языки, содержащие переменные второго и высших типов и функции таких переменных. Стандартной интерпретацией называется при этом такая, в которой область пробега для каждой переменной (или функции) состоит из всех предикатов (функций) соответствующего типа; наряду со стандартными, рассматриваются общие интерпретации, в которых для каждой переменной указывается область пробега, состоящая из некоторого семейства элементов соответствующего типа модели. По отношению к общим интерпретациям и связанной с ними выполнимостью имеет место теорема, аналогичная (H). Класс моделей называется определимым (квазиопределимым), если он состоит из всех общих моделей, удовлетворяющих некоторой формуле (соответственно семейству формул) языка высшего порядка. Пересечение определимого класса моделей с семейством всех стандартных моделей называется стандартно определимым классом. Не существует (за исключением арифметических исчислений первой ступени) определимых классов, содержащих бесконечную модель и стандартно определимых. Если Γ — множество предложений второй ступени, заданных в предваренной форме и не содержащих кванторов общности по переменным классам, отношениям или функциям, то если существует общая модель Γ, существует и стандартная. В конце статьи автор рассматривает приложение его метода к одной теореме Эверетта и Уэйплса (Everett C. J., Whaples G., Bull. Amer. Math. Soc., 1947, **53**, № 5, 477).

A. C. Есенин-Вольпин

5427. Заметка о категориях. Смарт (A note on categories. Smart J. C.), Brit. J. Philos. Sci., 1953, **4**, № 15, 227—228 (англ.)

Небольшая статья, относящаяся к семантике, для которой понятие числа является лишь иллюстративным материалом. Райл (Ryle, The concept of mind) ввел критерий, согласно которому два выражения (или слова) «A» и «B» относятся к разным категориям, если можно указать «бланк» (т. е. результат замены части некоторой фразы на тире), заполнение которого посредством «A» (т. е. подстановка «A» вместо тире) превращает бланк в осмысленное высказывание, а заполнение бланка посредством «B» — в бессмыслицу. В противном случае «A» и «B» относятся к одной и той же категории. (Ср. аналогичное понятие «семантической категории» у Тарского, Tarski A., Studia philosophica, 1936, **1**, 261 — 405, § 4). Автор высказывает мнение, что согласно этому критерию любые два выражения принадлежат различным категориям, например, любые два числа. Скажем, $\frac{7}{5-(-)} = \frac{9}{2}$ имеет смысл только при заполнении бланка числами, отличными от 5. Следовательно, 2 и 5 относятся к различным категориям. Аналогичное рассуждение применимо к любой паре чисел. *A. C. Есенин-Вольпин*

5428 К. О понятии «тот, который», в положительном исчислении и в интуиционистских исчислениях. Йоханссон (Sur le concept de «le» (ou «ce qui») dans le calcul affirmatif et dans les calculs intuitionnistes. Johansson Ingebrigt. Les méthodes formelles en axiomatique. Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, № 26, Paris, 1950, pp. 65—72; discussion, p. 72. Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1953) (франц.)

Автор показывает, как могут быть введены описания в теорию T, формализованную на основе положительной логики, минимального исчисления или интуиционистской логики. Предполагается, что T содержит знак равенства. Если p — любой терм из T, а x — переменная, то оператор подстановки p_x определяется как $p_x f(\ldots x \ldots) \overline{\mathrm{D}} f(\ldots p \ldots)$. Легко выводятся восемь формул эквивалентности $S_1 — S_8$ для операторов подстановки. Пусть A — конъюнкция аксиом T. Если $u(x)$ — пропозициональная функция, для которой выводима формула

$$A \supset (Ex)\, u(x) \,\&\, (x)(y)(u(x) \,\&\, u(y) \supset x = y),$$

то вводится оператор описания $(\iota_x u(x))_y$ и к T добавляется аксиома $(\iota_x u(x))_y f(y) \supset (y)(u(y) \supset f(y))$. Показывается, что операторы описания удовлетворяют $S_1 — S_8$, так что в этом отношении $\iota_x u(x)$ можно рассматривать как терм. *A. Heyting*

Перевод из Math. Rev., 1954, **15**, № 1, 2.

5429 К. О формализации математических теорий. Лукасевич (Sur la formalisation des théories mathématiques. Łukasiewicz Jan). Les méthodes formelles en axiomatique. Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, № 26, Paris, 1950, pp. 11—19; discussion, pp. 19—21 Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1953) (франц.)

Автор рассматривает взаимную связь между различными фундаментальными принципами элементарной теории чисел, такими как слабая индукция, сильная индукция, принцип спуска, принцип полного упорядочения («принцип наименьшего числа»). Он дает полностью формализованные доказательства эквивалентности трех последних прин-

ципов. Автор пользуется формальной системой, выраженной средствами введенных им бесскобочных обозначений и включающей переменный пропозициональный функтор δ (ср. Łukasiewicz J., Proc. Roy. Irish Acad., 1951, A54, 25—35). В последовавшем обсуждении Керри (H. B. Curry) сравнивает бесскобочную систему обозначений автора с другими системами. Он заключает, что в некоторых случаях для ясности необходимо предварительное введение скобок или точек даже в обозначениях Лукасевича.

A. Robinson

Перевод из Math. Rev., 1954, **15**, № 1, 1.

5430 **РЕЦ.** **Введение в метаматематику. Клини** (Introduction to metamathematics. Kleene S. C., 550 pp., Van Nostrand, New York, 1953) [**Рецензия: Марков А.**, Новые книги за рубежом, 1953, № 10, 32—36]

5431 **РЕЦ.** **Исследования по логике и теории вероятностей. Буль** (Studies in logic and probability. Boole George, ed. by Rhees R., 500 pp., Watts and Co., London, 1952, 25 s.) [**Рецензия: Хесс** (Hesse Mary B.), Brit. J. Philos. Sci., 1953, **4**, № 15, 262—264 (англ.)]

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

5432. **Асимптотические теоремы о разложениях на слагаемые. Мейнардус** (Asymptotische Aussagen über Partitionen. Meinardus G.), Math. Z., 1954, 59, № 4, 388—398 (нем.)

Рассматривается вопрос об асимптотической оценке количества всех разложений натурального числа на натуральные слагаемые при дополнительных условиях.

Для производящей функции $f(\tau)$ методом седловых точек (Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 3, ч. 2, М.—Л., 1950, гл. III, § 78) доказывается теорема:

Пусть произведение

$$f(\tau)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{-n\tau})^{-a_n}$$

сходится для $\Re(\tau)>0$ и обладает разложением

$$f(\tau)=1+\sum_{n=1}^{\infty}r(n)\exp(-n\tau),\quad \text{где}\quad a_n\geqslant 0.$$

Пусть ряд Дирихле

$$D(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{-s}\quad (s=\sigma+it)$$

сходится для $\sigma>\alpha>0$; для $\sigma\geqslant -c_0$ $(0<c_0<1)$ функция $D(s)$ регулярна, кроме точки $s=\alpha$, где имеется полюс первого порядка с вычетом A, и справедлива оценка $D(s)=O(|t|^{c_1})$, $c_1>0$ (равномерно относительно σ).

Пусть

$$g(\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\exp(-n\tau),\ \tau=y+2\pi ix\ (y>0)$$

и для $|\arg\tau|>\frac{\pi}{4}$, $|x|\leqslant\frac{1}{2}$ справедливо неравенство

$$\Re(g(\tau))-g(y)\leqslant -c_2 y^{-\varepsilon}$$

для достаточно малого y, с произвольным постоянным $\varepsilon>0$ и надлежащим $c_2>0$.

Тогда при $n\to\infty$

$$r(n)=Cn^{\varkappa}\exp\left\{n^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left[A\Gamma(\alpha+1)\zeta(\alpha+1)\right]^{\frac{1}{\alpha+1}}\right\}(1+O(n^{-\varkappa_1})).\qquad(1)$$

Здесь

$$C=\exp[D'(0)](2\pi(1+\alpha))^{-1/2}\times$$

$$\times\left[A\Gamma(\alpha+1)\zeta(\alpha+1)\right]^{\frac{1-2D(0)}{2(1+\alpha)}},$$

$$\varkappa=\frac{2D(0)-2-\alpha}{2(1+\alpha)},\ \varkappa_1=\frac{\alpha}{\alpha+1}\min\left(\frac{c_0}{\alpha}-\frac{\delta}{4},\frac{1}{2}-\delta\right),$$

δ — произвольное >0.

Даются приложения теоремы:

1. При $f(\tau)=\prod_{n=0}^{\infty}(1-\exp[-(kn+a)\tau])^{-1}$ из (1) следует асимптотическая формула для количества $q(n;\ k,\ a)$ разложений числа n на натуральные слагаемые $n_i\equiv a\pmod k$, $1\leqslant a\leqslant k$, $(a,k)=1$:

$$q(n;\ k,\ a)\sim Cn^{\varkappa}\exp(\pi\sqrt{2n/3k}).\qquad(2)$$

В (2), как частные случаи, содержатся известные результаты Ингама для $q(n;\ 1,\ 1)$ и $q(n;\ 2,\ 1)$ (Ingham A. E., Ann. Math., 1941, **42**, 1075—1090).

2. Пусть d — дискриминант квадратичного числового поля, h — число его классов, ε — основная единица >1 (при $d>0$), w — число корней из единицы (при $d<0$).

а) Если $r_\nu(n;\ d)$ — количество всех разложений числа n на натуральные слагаемые n_i с данным значением символа Кронекера

$$\left(\frac{d}{n_i}\right)=(-1)^{\nu}\quad(\nu=0\text{ или }1),$$

то $r_\nu(n;\ d)\sim C_\nu n^{\varkappa_\nu}\exp\left(\pi\sqrt{\frac{\varphi(|d|)n}{3|d|}}\right)$.

б) Для $d<0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r_0(n;\ d)}{r_1(n;\ d)}=\varepsilon^h.$$

в) Для $d<0$

$$\lim_{n\to\infty}n^{-h/w}\frac{r_0(n;\ d)}{r_1(n;\ d)}=$$

$$= \left(\frac{12}{\pi^2 |d| \varphi(|d|)}\right)^{h/w} \prod_{m=1}^{|d|-1} \left(\Gamma\left(\frac{m}{|d|}\right)\right)^{\left(\frac{d}{m}\right)}.$$

Опечатка: на стр. 395 в формуле (15) вместо $(|d|)$ должно быть $\varphi(|d|)$. *Б. М. Бредихин*

5433. К теории простых чисел. Вальфиш А. З., Сообщ. АН ГрузССР, 1953, **14**, № 2, 77—83

Пусть числовая функция $F(N)$ равна числу представлений натурального N в форме $N=mn+p$, где m и n — натуральные, p — простое.

Допуская справедливость обобщенной гипотезы Римана для всех L-функций, автор показывает, что

$$F(N) = \frac{315\zeta(3)}{2\pi^4} N \prod_{p/N} \frac{(p-1)^2}{p^2-p+1} + O\left(\frac{N(\log\log N)^2}{\log N}\right).$$

Примечание референта. Основной результат работы, повидимому, может быть получен без всякой гипотезы, так как более сильный в некотором смысле слова результат был получен без каких-либо дополнительных условий (Реньи А. А., Докл. АН СССР, 1947, **56**, № 5, 675—678). *Н. Г. Чудаков*

5434. Диофантово неравенство с простыми неизвестными. Юэ Минь-и (素未知數的丟番圖不等式。越民義), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1953, **3**, № 3, 218—224 (кит.; резюме англ.)

Используя метод И. М. Виноградова и результаты Хуа Ло-гэна, автор доказывает следующие теоремы:

1) Пусть $n \geqslant 2$, $f(x) = a_{n+1}x^{n+1} + \ldots + a_1 x$; $a_1, \ldots, a_{n+1}$ — вещественные,

$$2 \leqslant r \leqslant n, \quad a_r = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q\tau}, \ (a,q)=1, \ |\theta|<1,$$

$$P^{\chi} \ll q \leqslant \tau, \quad 0<\chi<1, \quad \tau = P^{r/2},$$

то существует такая постоянная C, что при $P>C$ система неравенств

$$|f(p) - v - A| < 6P^{-\frac{\rho}{3}+\varepsilon}, \quad 0<p<P, \qquad (1)$$

будет иметь решение в простых p и целых v, для любого вещественного A, причем

$$\rho = \frac{0{,}041}{n^2(\ln n + 2)} \quad \text{при } q > P^{1/4};$$

$$\rho = \frac{0{,}37\chi}{n^2\left(\ln\frac{n^2}{\chi} + 4\right)} \quad \text{при } q \leqslant P^{1/4}, \text{ и } \varepsilon > 0 \text{ — любое.}$$

2) Пусть C_1 — достаточно большое положительное, $P>C_1$, $\frac{1}{2}P < P_1 < P_2 \leqslant P$ и в промежутке $P_1 < x \leqslant P_2$ функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $(n+1)$-го порядка, причем $f^{(n)}(x)$ и $\varphi(x) = xf^{(n)}(x) - (n-1)f^{(n-1)}(x)$ не меняют знака в этом промежутке. Тогда, для некоторой постоянной f: $0 \leqslant f \leqslant 1$ и $A = P^{\frac{n+1}{2}+f}$, при выполнении условий

$$\frac{C_2}{A} \leqslant |f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{C_3}{A}; \quad \frac{C_4 P}{A} \leqslant |\varphi(x)| \leqslant \frac{C_5 P}{A};$$

$$|f^{(n+1)}(x)| \leqslant \frac{C_6}{PA}$$

система неравенств (1) разрешима в простых p и целых v, причем $\rho = \frac{0{,}045}{n^2(\ln n + 2)}$. Эти результаты примыкают к известным работам И. М. Виноградова по приближению дробными частями значений многочленов. *Г. В. Емельянов*

5435. Проблема оценки количества точек решетки. Рихерт (Ein Gitterpunktproblem. Richert Hans-Egon), Math. Ann., 1953, **125**, № 5, 467—471 (нем.)

Рассматривается задача оценки количества целых точек под гиперболой, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям; она является обобщением известной проблемы делителей. Доказывается теорема:

Пусть заданы вещественное число x и целые числа h_1, h_2, q_1, q_2 с условием $1 \leqslant h_1 \leqslant q_1$, $1 \leqslant h_2 \leqslant q_2$, $q_1 q_2 \leqslant x$. Обозначим через

$$D(x;\ q_1,\ h_1,\ q_2,\ h_2) = \sum_{\substack{n_1 n_2 \leqslant x \\ n_1 \equiv h_1 \pmod{q_1} \\ n_2 \equiv h_2 \pmod{q_2}}} 1$$

количество точек (n_1, n_2) под гиперболой $uv = x$ с целыми положительными координатами h_1, h_2, для которых $n_1 \equiv h_1 \pmod{q_1}$, $n_2 \equiv h_2 \pmod{q_2}$. Тогда при $x \to \infty$

$$D(x;\ q_1,\ h_1,\ q_2,\ h_2) = \frac{x}{q_1 q_2}\log\frac{x}{q_1 q_2} - \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{h_1}{q_1}\right) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{h_2}{q_2}\right) + 1\right)\frac{x}{q_1 q_2} + O\left(\left(\frac{x}{q_1 q_2}\right)^{\frac{27}{82}}\right), \qquad (1)$$

где $\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z)$ — логарифмическая производная гамма-функции. Постоянная, входящая в O, абсолютна.

Как частные случаи оценки (1) автор получает: а) оценку для количества $A(x)$ целых точек в круге $u^2 + v^2 \leqslant x$ (правда, с несколько более худшим остаточным членом, чем известно (Hua Loo-Keng, Quart. J. Math., 1942, **13**, 18—29)):

$$A(x) = \pi x + O(x^{\frac{27}{82}}); \qquad (2)$$

б) оценку для количества $I(x)$ целых идеалов с нормой, не превосходящей x, квадратичного числового поля дискриминанта d:

$$I(x) = cx + O(x^{\frac{27}{82}}|d|^{\frac{55}{82}}); \qquad (3)$$

в) наконец в случае проблемы делителей получается:

$$T(x)=\sum_{n\leqslant x}\tau(n)=D(x;\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)=x\log x+$$

$$+(2C-1)x+O(x^{\frac{27}{82}}),\qquad(4)$$

где $\tau(n)$ есть количество положительных делителей числа n, а C — постоянная Эйлера. Это лучшая из известных оценка для $T(x)$. В заключение автор обещает заменить остаточный член в формуле (4) на более сильный: $O(x^{\frac{15}{46}}\log^{\frac{12}{23}}x)$. *А. В. Малышев*

5436. Обобщение функции Мёбиуса. Гупта (A generalization of the Möbius function. Gupta Hansraj), Scripta math., 1953, 19, № 2—3, 121—126 (англ.)

Рассматривается функция $v_r(n)$, которую можно было бы определить как мультипликативную функцию, удовлетворяющую условиям:

$$v_r(p^\alpha)=\begin{cases}1, & \text{если } \alpha\equiv 0\pmod r,\\ -1, & \text{если } \alpha\equiv 1\pmod r,\\ 0, & \text{если } \alpha\not\equiv 0,1\pmod r,\end{cases}$$

в случае простого p.

Ее можно было бы ввести также по формуле:

$$\frac{\zeta(sr)}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_r(n)}{n^s}\ .$$

Автор предпочитает определение, основанное на формуле:

$$\sum_{d/m}v_r(d)=\begin{cases}1, & \text{если } m \text{ — } r\text{-я}\\ & \text{степень целого числа;}\\ 0 & \text{— в противном случае.}\end{cases}$$

Далее в работе доказываются неравенства

$$\left|\sum_{d\leqslant n}\frac{v_r(d)}{d}\right|\leqslant 1+n^{-1/r},$$

$$\sum_{n\leqslant x}\sum_{d/n}v_1(d)\log d=O(x),$$

из которых второе является аналогом неравенства Чебышева. Кроме того, доказывается аналог принципа обращения Мёбиуса (теорема 3 и 4) и теорема:

$$\sum_{d/n}v_r(d)\log^h d=0,$$

если число простых делителей, входящих в n в степени с показателем кратным r, больше h.

Все перечисленные свойства функции $v_r(n)$ аналогичны соответствующим свойствам функции Мёбиуса и их доказательства аналогичны доказательствам соответствующих свойств функции Мёбиуса.

В частности последнее предположение аналогично предложению, относящемуся к функции Мёбиуса и лежащему в основе вывода формулы Селберга

$$\log x\ \psi(x)+\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\psi\left(\frac{x}{n}\right)=2x\log x+o(x)$$

и ее обобщений. *Н. П. Романов*

5437. О связи рядов Эйзенштейна и тэта-рядов с дискриминантом эллиптических функций. Шёнеберг (Über den Zusammenhang der Eisensteinschen Reihen und Thetareihen mit der Diskriminante der elliptischen Funktionen. Schoeneberg Bruno), Math. Ann., 1953, 126, № 3, 177—184 (нем.)

Рядом Эйзенштейна ступени N и размерности k называется согласно Гекке (Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1927, 5) ряд $\sum(m\tau+n)^{-k}$, где m и n пробегают все целые числа, не равные одновременно нулю и удовлетворяющие условиям $m_1\equiv a_1$, $m_2\equiv a_2\pmod N$. При $k\geqslant 3$ ряд сходится абсолютно, при $k=2$ — условно и является модулярной формой веса k относительно группы $\Gamma(N)$, состоящей из преобразований $\tau\to\dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}$, где a, b, c, d — целые, $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=\pm 1$, $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\equiv E\pmod N$.

Если $\Gamma_1(N)$ — такая, содержащая $\Gamma(N)$, группа унимодулярных преобразований, что фактор-пространство верхней полуплоскости по $\Gamma_1(N)$ гомеоморфно сфере, то все функции, автоморфные относительно $\Gamma_1(N)$, являются рациональными функциями одной. Доказывается, что эта образующая функция может быть построена в виде отношения линейных комбинаций значений функции Вейерштрасса $\wp$ с периодами 1 и τ в точках, получающихся от деления параллелограмма периодов на N частей (эти значения сами являются рядами Эйзенштейна).

Рассматривается функция $\Delta(\tau)$, называемая в теории эллиптических функций дискриминантом. Известно, что если λ есть делитель 12, то $\Delta_\lambda(\tau)=\sqrt[\lambda]{\Delta(\tau)}$ являются модулярными формами относительно группы $\Gamma(\lambda)$, фактор-пространство по которой гомеоморфно сфере. Дается выражение функций $\Delta_\lambda(\tau)$ через ряды Эйзенштейна.

Если D — целое число <0, $\mathfrak{a}$ — идеал поля $R(\sqrt{D})$ с нормой A, ρ — число этого идеала и Q — натуральное число, то тэта-ряд

$$\vartheta_k(\tau;\ \rho,\ \mathfrak{a},\ Q\sqrt{D})=\sum\mu^{k-1}\exp\frac{2\pi i\tau}{AQ\sqrt{D}}\mu\mu',$$

в котором μ пробегает все целые числа $R(\sqrt{D})$, удовлетворяющие условию $\mu\equiv\rho\pmod{\mathfrak{a}\,Q\sqrt{D}}$, является модулярной формой относительно группы $\Gamma(Q\,|\,D\,|)$. Выводятся выражения функций $\Delta_\lambda(\tau)$ при $\lambda=3,\ 4,\ 6,\ 12$ через эти ряды. При этом для $\lambda=3$ $D=-3$, для $\lambda=4$ $D=-4$, для $\lambda=6$ $D=-3$ и для $\lambda=12$ $D=-3$. Исходя из этих выражений, находят эйлеровы разложения для соответствующих рядов Дирихле, получающихся из тэта-рядов преобразованием Меллина. Они имеют вид

$$\prod_{p\neq 2}(1-\tau_\lambda(p)\,p^{-s}\pm p^{12/\lambda-1-2s})^{-1}.$$

Вычисляются коэффициенты $\tau_\lambda(p)$. Например, при $\lambda=4$

$$\tau_4(p)=\begin{cases}\pi^2+\pi'^2, & \text{если } p=\pi\pi' \text{ в } R(\sqrt{-1})\\ 0, & \text{если } p\not\equiv 1\pmod 4.\end{cases}$$

Из полученных выражений для $\tau_\lambda(p)$ следует, что при $\lambda = 3,\ 4,\ 6$ и 12 $|\tau_\lambda(p)| < 2p^{6/\lambda - 1/2}$.

Эти неравенства аналогичны гипотезе Рамануджана $|\tau(p)| < 2p^{11/2}$ для функции $\Delta = \Delta_1$ и подтверждают общую гипотезу Петерсона (см. обзор Радемахера в Bull. Amer. Math. Soc., 1942, 48, № 6, 397). Рассматриваются функции

$$\vartheta_{2k,l}(\tau) = \sum \exp \frac{2\pi i \tau}{4}(x_1^2 + \ldots + x_{2k}^2),$$

причем $x_1, \ldots, x_l$ пробегает все нечетные, а $x_{l+1}, \ldots, x_{2k}$ — все четные целые числа. Эти функции являются модулярными формами веса k относительно группы $\Gamma(4)$. Выражение их или их линейных комбинаций через ряды Эйзенштейна дает тождества, связанные с числом разложений целого числа на квадраты. Например, получается следующий результат: если $a_{2k,l}(n)$ означает число представлений n в виде $x_1^2 + \ldots + x_{2k}^2$, $x_i \equiv 1 \pmod 2$, $i = 1, \ldots, l$; $x_i \equiv 0 \pmod 2$, $i = l+1, \ldots, 2k$, то при $k > 4$ существует 6 линейно независимых форм

$$\sum_{l=0}^{2k} c_l^{(i)} a_{2k,l}(n),\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 6,$$

с независящими от n коэффициентами $c_l^{(i)}$, являющимися элементарными функциями от n.

И. Р. Шафаревич

5438. Асимптотический закон для представления чисел некоторыми положительными тернарными квадратичными формами. Малышев А. В., Докл. АН СССР, 1953, 93, № 5, 771—774

Автору удается получить асимптотический закон для представления чисел «удобными» тернарными формами. Подобные задачи пока недоступны обычным методам аддитивной теории чисел. В арифметической теории квадратичных форм работа дает первый пример асимптотических формул для классов многоклассного рода.

Рассматриваются «удобные» формы $f(x, y, z)$ инвариантов $[r, 1]$, где r нечетно, и $\left(\frac{f}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$ для всех простых $p \nmid r$, что и определяет «удобность».

Если число m взаимно просто с r, достаточно велико и удовлетворяет родовым условиям формы $f(x, y, z)$, то для числа примитивных представлений его формой $t(f, m)$ получаются асимптотические формулы:

$$t(f, m) \sim \frac{24 \cdot 2^{k-1}}{r\left(1 + \frac{1}{p_1}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{p_k}\right)} h(-m),$$

если $m \equiv 1,\ 2 \pmod 4$,

$$t(f, m) \sim \frac{16 \cdot 2^{k-1}}{r\left(1 + \frac{1}{p_1}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{p_k}\right)} h(-m),$$

если $m \equiv 3 \pmod 8$,

где $h(-m)$ — число классов идеалов $k(\sqrt{-m})$.

Средством доказательства служит аналитическая арифметика кватернионов; соответствующие подсчеты производятся комбинаторным путем без использования их теоретико-вероятностной природы. Остаточный член не оценивается; оценка для него, повидимому, получается с понижением не выше логарифмического.

Примечание референта. На стр. 771 автор забыл указать, что m должно удовлетворять родовым условиям формы, как это видно из его доказательства. Примечание на стр. 771 неверно. На стр. 772 в доказательстве пункта 1° вместо «неассоциированных справа» следует читать: «примарных». На стр. 774 в пункте 6° также упущены родовые условия.

Ю. В. Линник

5439. О логарифмической функции Куммера. Денеш (Über die Kummerschen logarithmischen Hilfsfunktionen. Denes Peter), Acta scient. math., 1954, 15, № 2, 115—125 (нем.)

Обозначим: l — нечетное простое число, $\zeta = \exp \frac{2\pi i}{l}$, $R(\zeta)$ — поле деления круга, $\lambda = 1 - \zeta$, $\mathfrak{l} = (\lambda)$ — простой идеал в $R(\zeta)$, $\omega = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \zeta^i$ (a_i — целое рациональное), $\omega^* = \sum_{i=0}^{l-2} b_i \zeta^i$ — нормальный вид числа ω, $\omega(e^v)$ и $\omega^*(e^v)$ — функции, принадлежащие соответствующим числам ω и ω^*, получаемые из последних заменой $\zeta \to e^v$, D_z — оператор, определяемый формулой

$$D_z \omega^*(e^v) = \sum_{i=1}^{l-2} b_i i^z \quad (z = 1,\ 2, \ldots).$$

Автор статьи доказывает две теоремы:

Теорема I. Если $\omega \in R(\zeta)$ — целое число, взаимно простое с $\mathfrak{l}$, и $\omega(e^v)$ — функция, принадлежащая ω, для которой выполняются сравнения:

$$D_{il^y} \log \omega(e^v) \equiv 0 \pmod{l^{y+1}} \ (y = 1, \ldots, n-1;\ i = 1, \ldots, l-2),$$

$$D_{kl^n} \log \omega(e^v) \equiv 0 \pmod{l^{n+1}} \ (k = 1, \ldots, t-1,\ 0 < t < l-1),$$

$$D_{tl^n} \log \omega(e^v) \equiv q \not\equiv 0 \pmod{l^{n+1}} \ (0 < t < l-1),$$

то

$$\omega \equiv f_0 + f_t \lambda^{n(l-1)+t} \pmod{\mathfrak{l}^{n(l-1)+t+1}},$$

где f_0 и f_t — целые рациональные числа, не делящиеся на l, и

$$f_0 \equiv \omega_0 + \frac{l}{l-1} D_{l^{n(l-1)}} \omega(e^v) \pmod{l^{n+1}},$$

$$f_t \equiv (-1)^t \omega_0 \frac{q}{l^n\, t!} \pmod l.$$

Теорема II. Если $\omega \in R(\zeta)$ взаимно просто с $\mathfrak{l}$ и сравнимо с целым рациональным числом по $\bmod l^n$, а $\omega(e^v)$ — функция, принадлежащая ω, и $\omega^*(e^v)$ — функция, принадлежащая числу ω, записанному в нормальном виде ω^*, то для того чтобы

$\omega_0 \equiv \omega_0^* \pmod{l^{n+1}}$, необходимо и достаточно выполнение сравнения

$$D_{l^n(l-1)} \log \omega(e^v) \equiv 0 \pmod{l^n}. \qquad \textit{П. Н. Реморов}$$

5440. Уравнение $X^2 + PX + Q = 0$ в бинарных матрицах. Терстон, Александер (The equation $X^2 + PX + Q = 0$ in binary matrices. Thurston H. S., Alexander Mary K.), Amer. Math. Monthly, 1954, 61, № 1, 8—17 (англ.)

В работе решается уравнение

$$X^2 + PX + Q = 0, \qquad (1)$$

где P и Q — матрицы второго порядка с целочисленными элементами. Получающиеся решения либо тоже целочисленные матрицы, которые иногда умножаются на рациональный множитель, либо матрицы с одним или двумя параметрами.

Пусть $P = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ и $Q = \begin{bmatrix} \sigma & \xi \\ \eta & \zeta \end{bmatrix}$, $r_1 = \frac{\alpha+\delta}{2}$, $r_2 = \frac{\sigma+\zeta}{2}$,

Δ_1 и Δ_2 — соответственно определители P и Q, $u = 4r_2 - \Delta_1$,

$$v = 4r_2^2 - 4\Delta_2 - 4\Delta_1 r_2 + 2r_1(\alpha\zeta + \delta\sigma - \beta\eta - \gamma\xi),$$
$$w = \eta\xi(\alpha - \delta)^2 + \beta\gamma(\sigma - \zeta)^2 - (\beta\eta - \gamma\xi)^2 - (\alpha - \delta)(\sigma - \zeta)(\beta\eta + \gamma\xi).$$

Если X_1 — решение (1), а $x^2 + bx + d = 0$ — характеристическое уравнение матрицы X_1, то b и d определяются по формулам

$$b = r_1 \pm \sqrt{r_1^2 + (\Delta_1 - \lambda)},$$
$$d = \frac{2r_2 + \lambda \pm \sqrt{(2r_2 + \lambda)^2 - 4\Delta_2}}{2}, \qquad (2)$$

где λ — корень уравнения $\Phi(\lambda) = \lambda^3 + u\lambda^2 + v\lambda + w = 0$. Пусть $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = bI$, $D = dI$ и матрица $P - B$ неособенная, тогда

$$X_1 = -(P - B)^{-1}(Q - D).$$

Вообще, корни уравнения $\Phi(\lambda) = 0$ определяют шесть решений (1).

Работа посвящена нахождению тех решений уравнения (1), которые соответствуют нулевым корням $\Phi(\lambda) = 0$. Этот случай, названный нерегулярным, оставался открытым. Показано, что особенность матрицы $P - B$ совместима с существованием корня $\lambda = 0$ уравнения $\Phi(\lambda) = 0$. Пара (b, d), определяемая формулами (2), при $\lambda = 0$ называется допустимой, если она определяет решение уравнения (1). Если $\Phi(\lambda) = 0$ имеет корень $\lambda = 0$, то может оказаться меньше, чем шесть допустимых пар (b, d). Каждой допустимой паре, связанной с с $\lambda = 0$, может соответствовать либо единственное решение, либо параметрическое решение (1). Достаточным условием нерегулярности уравнения (1) является линейная зависимость P от Q.

Если $P = \mu Q + \nu$, где $\mu \neq 0$, то $\Phi(\lambda)$ имеет вид $\lambda^3 + k\lambda^2 + 4mn\lambda$, где $k = 4r - \mu^2\Delta - 2\mu\nu r - \nu^2$, $m = 1 - \mu\nu$, $n = r^2 - \Delta$, $2r$ — след Q, Δ — определитель Q. Необходимым и достаточным условием существования допустимой пары (a, b), связанной с $\lambda = 0$, которая определяет решение уравнения $X^2 + (\mu Q + \nu)X + Q = 0$, является равенство $m = 0$. Когда $m = 0$ при $\lambda = 0$, то имеется два параметрических решения, если $n \neq 0$, и одно такое решение, если $n = 0$.

Если P скалярна, а Q нескалярна, то (1) не имеет решения, соответствующего $\lambda = 0$; если Q скалярна, а P нескалярна, то решение, соответствующее $\lambda = 0$, имеется тогда и только тогда, когда $Q = 0$. *В. И. Шнейдмюллер*

5441. О числах, допускающих представление формой $x^2 + Ay^2$. Санелевич (Despre numerele reprezentabile prin forma $x^2 + Ay^2$. Sanielevici S.), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Române. Sec. mat. şi fiz., 1953, 5, № 2, 337—347 (рум.; резюме на русск., франц.)

Рассмотрено несколько случаев представления целых чисел формой $\frac{x^2 + Ay^2}{4}$.

С помощью элементарных приемов доказывается для $A = 7, 11, 19, 67, 163$, что всякое простое число p, делящее выражение $C^2 + A$, должно иметь вид $\frac{x^2 + Ay^2}{4}$, где x и y имеют одинаковую четность. *А. И. Попов*

См. также: 5423, 5443

АЛГЕБРА

5442 К. Высшая алгебра. Т. I. Мостовский, Старк (Algebra wyższa. T.I. Mostowski A., Stark M., 22 ark., Panstwowe Wydawnnictwo Naukowe, Warszawa, 1953, 12 Rb.), Biul. eksportowy, 1953, № 9, 14 (библ.)

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

5443. Необходимые и достаточные условия приводимости многочленов. Яковкин М. В., Докл. АН СССР, 1953, 93, № 4, 629—631

В этой работе впервые получены весьма простые необходимые и достаточные критерии приводимости многочленов (над полем рациональных чисел). Основную роль играет следующая теорема, устанавливающая взаимосвязь между числовыми равенствами и многочленными тождествами:

Теорема 1. Пусть

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}, \quad \varphi(x) = \sum_{k=0}^{p} b_k x^{p-k}, \quad \psi(x) = \sum_{k=0}^{q} c_k x^{q-k}$$

— целочисленные функции с неотрицательными коэффициентами. Для справедливости тождества

$$f(x) = \varphi(x)\,\psi(x)$$

необходимо и достаточно, чтобы имели место равенства

$$f(1) = \varphi(1)\,\psi(1), \quad f(t) = \varphi(t)\,\psi(t),$$

хотя бы при одном целом значении t, превышающем все коэффициенты этих функций.

Из этой теоремы, а также из еще более общей теоремы 2 вытекает ряд необходимых и достаточных признаков приводимости многочленов. Например, если $f(x)$ — целочисленный многочлен с неположительной верхней границей вещественных частей корней и t — целое положительное число, большее, чем все коэффициенты $f(x)$, то для приводимости $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы число $f(t)$ имело по крайней мере два целых сомножителя, произведение сумм коэффициентов разложения по степеням t которых было бы равно сумме коэффициентов $f(x)$. *Л. Я. Окунев*

5444. Об одном методе отыскания неприводимых множителей. Яковкин М. В., Докл. АН СССР, 1953, **93**, № 5, 783—785

Излагается простой и в практическом отношении удобный метод разложения многочлена на неприводимые множители над полем рациональных чисел. Этот метод основан на результатах, полученных автором (см. реф. 5443).

Преимущество этого метода перед известным методом Кронекера состоит в том, что с помощью нового метода достаточно взять некоторое значение аргумента x и вычислить соответствующее значение многочлена $f(x)$, чтобы получить делители $f(x)$ любой степени. *Л. Я. Окунев*

5445. Критерий неприводимости многочленов с целыми коэффициентами над полем рациональных чисел. Пароди (Un critère d'irréductibilité des polynomes à coefficients entiers sur le corps des nombres rationnels. Parodi Maurice), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 18, 1057—1059 (франц.)

Пусть

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

— многочлен с целыми коэффициентами. В работе рассматривается случай $a_1 = 0$ и $n \geqslant 3$ и доказывается следующий критерий неприводимости, аналогичный известному критерию Перрона:

Если соблюдается условие

$$|a_2| > 1 + \sum_{k=3}^{n} |a_k|,$$

то при $a_2 > 0$ многочлен $f(x)$ неприводим (над полем рациональных чисел), а при $a_2 < 0$ многочлен $f(x)$ неприводим, когда он сохраняет знак в каждом из двух интервалов

$$\left(-\sqrt{-a_2 - \sum_{k=3}^{n} |a_k|},\ -\sqrt{-a_2 + \sum_{k=3}^{n} |a_k|}\right)$$

и

$$\left(\sqrt{-a_2 - \sum_{k=3}^{n} |a_k|},\ \sqrt{-a_2 + \sum_{k=3}^{n} |a_k|}\right).$$

Доказательство основано на рассмотрении характеристических чисел матрицы A^2, где A — матрица, характеристические числа которой являются корнями многочлена $f(x)$. *Л. Я. Окунев*

5446. Одно свойство уравнений с вещественными коэффициентами. Барбэлат (O proprietate a ecuațiilor cu coeficienți reali. Barbălat I.), Gaz. mat. și fiz., 1953, 5, № 10, 460—462 (рум.)

Пусть

$$P(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (1)$$

— алгебраическое уравнение с вещественными коэффициентами. Доказывается теорема:

Если четыре последовательных коэффициента уравнения (1) a_p, a_{p-1}, a_{p-2}, a_{p-3} таковы, что двойные точки инволюции, определенной уравнениями

$$a_p x^2 + 2a_{p-1} x + a_{p-2} = 0$$
$$a_{p-1} x^2 + 2a_{p-2} x + a_{p-3} = 0$$

на проективной прямой, действительны, то уравнение (1) имеет мнимые корни.

Эта теорема обобщает следующие известные свойства алгебраических уравнений с вещественными коэффициентами (Гюнтер Н. М., Кузьмин Р. О., Сборник задач по высшей математике, т. II, Гостехиздат, 1949, 15):

1. Если три последовательных коэффициента уравнения (1) образуют геометрическую прогрессию, то среди корней этого уравнения имеются мнимые.

2. Если четыре последовательных коэффициента уравнения (1) образуют арифметическую прогрессию, то среди корней этого уравнения имеются мнимые. *В. А. Андрунакиевич*

5447. Критерий отсутствия нулей в единичном круге. Уэйнберг (Test for zeros in the unit circle. Weinberg Louis), J. Appl. Phys. (N. Y.), 1953, **24**, № 9, 1251—1252 (англ.)

Автор отмечает, что заметка не содержит новых результатов и лишь обращает внимание на известный, но недостаточно используемый прием исследования устойчивости линейных систем.

Указывается, что практическое использование критерия Гурвица для определения условий, при которых многочлен не имеет корней слева от мнимой оси, сложно и что удобнее непосредственно применять алгоритм последовательного деления Евклида к многочленам, составленным из членов рассматриваемого многочлена и содержащим только четные или только нечетные показатели степени. Утверждение это ошибочно, так как операции, которые надо выполнить при применении алгоритма Евклида, совпадают с операциями, которые выполняются при использовании критерия Рауса и при сведении к диагональной форме старшего определителя Гурвица.

Переходя к характеристическим многочленам по $z = e^{-Tx}$ ($T = \text{const} > 0$), все корни которых должны в устойчивом случае располагаться вне единич-

ного круга, автор рекомендует подстановкой $z = \frac{1-s}{1+s}$ отображать область плоскости x, расположенную вне единичного круга, на левую полуплоскость плоскости s и для решения вопроса об устойчивости рассматривать многочлен по s, используя алгоритм Евклида. *М. А. Айзерман*

5448. Результант двух характеристических уравнений. Тартаковский. В. А., Успехи матем. наук, 1953, **8**, № 6, 127—132

С помощью отображения матриц размерности $n \times m$ на векторы в пространстве mn измерений дается новое доказательство следующего предложения (см., например, Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, 1954, 379).

Если $A = \| a_{ik} \|_1^m$, $B = \| b_{ik} \|_1^n$ — матрицы с характеристическими числами $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$; $\beta_1, \ldots, \beta_n$ соответственно, а X — матрица размерности $n \times m$, то линейный оператор $AX - XB$ имеет в пространстве прямоугольных матриц X своими характеристическими числами всевозможные разности $\alpha_i - \beta_j (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$.

Как применение указанного предложения автор приводит выражение результанта характеристических уравнений матриц $A = \| a_{ik} \|_1^m$ и $B = \| b_{ik} \|_1^n$ в виде определителя порядка mn. *Л. М. Котелянский*

5449. Замечания к теории матриц. Вегнер (Bemerkungen zur Matrizentheorie. Wegner U.), Z. angew. Math. und Mech., 1953, **33**, № 8—9, 262—264 (нем.)

Пусть A — квадратная матрица n-го порядка с комплексными элементами, с характеристическим многочленом

$$\varphi(\lambda) \equiv \lambda^n - c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} - \cdots \pm c_n$$

и присоединенной матрицей

$$F(A; \lambda) = \sum_{\varkappa=0}^{n-1} H_\varkappa \lambda^{n-1-\varkappa},$$

для которой $\varphi(\lambda) E - \varphi(A) = F(A; \lambda)(\lambda E - A)$. Вводятся числа Горнера x_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$, определяемые из рекурсивных соотношений

$$x_\varkappa - c_1 x_{\varkappa-1} + c_2 x_{\varkappa-2} - \ldots \pm c_\varkappa = 0;$$

при этом полагается $x_0 = 1$ и $c_p = 0$ при $p > n$.

Устанавливается следующая формула:

Если $g(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \lambda^\nu$ — целая функция, то

$$g(A) = \sum_{\varkappa=0}^{n-1} H_\varkappa \sum_{\rho=0}^{\infty} a_{\varkappa+\rho} x_\rho.$$

В частности,

$$e^{At} = \sum_{\varkappa=0}^{n-1} H_\varkappa \cdot \sum_{\rho=0}^{\infty} x_\rho \frac{t^{\varkappa+\rho}}{(\varkappa+\rho)!}.$$

Для одновременного вычисления скалярных коэффициентов $c_\varkappa$ и матричных $H_\varkappa$ предлагается известный прием Д. К. Фаддеева (см. например, Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, 1954, 77—79). При этом получается формула

$$\frac{E+A}{E-A} = \frac{1}{1+s}\left(E + \sum_{\varkappa=1}^{n-1} H_\varkappa + \sum_{\varkappa=1}^{n} AH_{\varkappa-1}\right),$$

где $s = -c_1 + c_2 - \cdots \pm c_n$.

Находя при помощи итерации наибольшее по модулю характеристическое число λ^B матрицы $B = (E+A)(E-A)^{-1}$ и записывая $|\lambda^B|_{\max} < 1$, автор получает условие устойчивости для матрицы A (все $\mathrm{Re}(\lambda_i^A) < 0$).

В статье отмечается, что выведенные формулы весьма удобны для вычислений на электронных машинах. *Ф. Р. Гантмахер*

5450. Заметка о t-дифференцировании и Ω-операторе. Эйткен (A note on trace-differentiation and the Ω-operator. Aitken A. C.), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1953, сер. 2, **10**, 1—4 (англ.)

Пусть $X = [x_{ij}]$ — квадратная матрица из n строк и столбцов, а $\Omega = \left[\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right]$ — квадратная матрица из дифференциальных операторов $\frac{\partial}{\partial x_{ij}}$. Под t-дифференцированием (trace-differentiation) понимается оператор Ω_s, определяемый формулой $\Omega_s Y = \Omega S(Y) = \left[\frac{\partial S(Y)}{\partial x_{ij}}\right]$, где $S(Y)$ — след матрицы Y. Тэрнбулл (Turnbull H. W., Proc. Edinburgh Math. Soc., 1930, **2**, 33—54; 1931, **2**, 256—264) показал, что при натуральном r

$$\Omega_s X^r = rX^{r-1}, \quad \Omega X^{-r} = -rX^{-r-1}. \tag{1}$$

Автор вновь доказывает эти соотношения, причем для второго соотношения он дает простое остроумное доказательство; кроме того, он показывает, что для симметрической или кососимметрической матрицы X соотношения (1) остаются верными и в том случае, если под Ω понимать матрицу $\Omega = \left[\varepsilon_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ji}}\right]$, где: $\varepsilon_{ii} = 1$, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = 1/2$, $i \neq j$ в симметрическом случае; $\varepsilon_{ii} = 0$, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = 1/2$, $i \neq j$ в кососимметрическом случае. Из этих результатов непосредственно следует детерминантная теорема Кели:

$$|\Omega||X^r| = r(r+1)(r+2)\cdots(r+n-1)|X|^{r-1} \tag{2}$$

и ее аналог для симметрического случая

$$|\Omega||X^r| = r(r+1/2)(r+1)\cdots (r+n/2-1/2)|X|^{r-1}, \tag{3}$$

полученный ранее Гардингом (Gårding L., Proc. Edinburgh Math. Soc., 1948, 8, 73—75); при этом в формуле (3) матрица Ω модифицирована указанным выше образом. *М. А. Наймарк*

5451. О расположении характеристических корней матрицы. Брауэр (Über die Lage der charakteristischen Wurzeln einer Matrix. Brau-

er Alfred), J. reine und angew. Math., 1953, 192, № 2, 113—116 (нем.)

Устанавливается теорема:

Каждое характеристическое число квадратной матрицы $A = \| a_{ik} \|_1^n$ лежит внутри или на границе по крайней мере одного из $\frac{1}{2} n(n-1)$ овалов $|(z-a_{rr})(z-a_{ss}) - a_{rs}a_{sr}| \leqslant Q_{rs}$ $(r,s=1,\ldots,n;\ r<s)$, где

$$Q_{rs} = \sum_{(\nu \neq r,s)}^{1 \cdots n} \{ |a_{rs}a_{s\nu}| + |a_{sr}a_{r\nu}| + |a_{r\nu}a_{s\nu}| \} +$$

$$+ \sum_{\substack{\mu<\nu \\ (\mu \neq r,s) \\ (\nu \neq r,s)}}^{1 \cdots n} |a_{r\mu}a_{s\nu} + a_{s\mu}a_{r\nu}|.$$

Приводятся некоторые обобщения и уточнения этой теоремы. *Ф. Р. Гантмахер*

5452. Заметка о примитивных матрицах. Херстейн (A note on primitive matrices. Herstein I. N.), Amer. Math. Monthly, 1954, 61, № 1, 18—20 (англ.)

Дано чисто алгебраическое доказательство известной теоремы Фробениуса о неотрицательных матрицах с вещественными элементами: если $A \geqslant 0$, то $A^m > 0$ для некоторого целого $m > 0$ тогда и только тогда, когда матрица A примитивна (определения см. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, Гостехиздат, М., 1954, гл. XIII, § 1, 2, 5). *Н. Ф. Сесекин*

5453. Об инвариантах классов подобных линейных преобразований. I. Якобсталь (Über die Klasseninvariante ähnlicher linearer Abbildungen. I. Jacobsthal Ernst), Norske Vid. Selsk. Forh., Trondheim, 1952, 25, 119—124 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (нем.)

5454. О классах подобных линейных преобразований. I. II. Воделанн (Über die Klassen ähnlicher linearer Abbildungen. I. II. Waadeland Haakon), Norske Vid. Selsk. Forh., Trondheim, 1952, 25, 125—128, 129—130 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (нем.)

5455. Матрицы Стирлинга. Риге (Matrices de Stirling. Riguet Jacques), C. r. Acad. sci., 1953, 236, № 19, 1839—1841 (франц.)

ГРУППЫ

5456. Замечание об одном соотношении в свободных группах. Шик (Bemerkung über eine Relation in freien Gruppen. Schiek Helmut), Math. Ann., 1953, 126, № 5, 375—376 (нем.)

Доказывается, что если $S_1, \ldots, S_n$, T — элементы свободной группы, причем $T \neq 1$, и если $\prod_{i=1}^{n} S_i^{-1} T^{\varepsilon_i} S_i = 1$, то $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = 0$. Заметим, что соответствующее утверждение справедливо для любой группы, обладающей центральной системой с факторами без кручения, и его справедливость для свободных групп вытекает из теоремы Витта о факторах нижней центральной цепи свободной группы. *А. Г. Курош*

5457. О некоторых гомоморфизмах полиномиальных групп. Круллъ (Über gewisse Homomorphismen von Polynomgruppen. Krull Wolfgang), Math. Ann., 1953, 126, № 5, 377—380 (нем.)

Пусть G — некоторая группа, F — свободная группа ранга n, A — прямое или свободное произведение групп G и F. По определению, элемент a из A обладает корнем, если существует гомоморфное отображение группы A на некоторую группу, изоморфное на G, но переводящее a в единицу. Элемент $a = gf$, где $f \neq 1$, из прямого произведения $G \times F$ тогда и только тогда обладает корнем, если g принадлежит центру группы G. Отсюда вытекает достаточное условие существования корня для элемента свободного произведения $G * F$, обобщающее один критерий Шуффа (Schuff H. K., Math. Ann., 1952, 124, 294—297). *А. Г. Курош*

5458. О нильгруппах. Плоткин Б. И., Докл. АН СССР, 1954, 94, № 6, 999—1001

Группа G называется нильгруппой, если для любой пары ее элементов x, y найдется такой номер n, что

$$\underbrace{[\cdots[x,y],y],\ldots,y]}_{n} = 1, \text{ где } [x,y] = x^{-1}y^{-1}xy.$$

В работе доказываются следующие свойства нильгрупп.

1. Нильгруппа без кручения является R-группой.

2. Нильгруппа с возрастающим разрешимым рядом (конечной или бесконечной длины) локально нильпотентна.

Как указывает автор, этот результат был им доложен на Всесоюзной алгебраической конференции в 1951 г. Доказательство теоремы в работе опускается, так как оно является «почти дословным повторением доказательства основной теоремы» другой работы автора (Плоткин Б. И., Докл. АН СССР, 1951, 73, № 4, 539). Частный случай этой теоремы (для случая конечного разрешимого ряда) доказан в 1953 г. Грюнбергом (РЖМат, 1954, 1566).

3. Нильгруппа без кручения, удовлетворяющая условию минимальности для изолированных подгрупп и обладающая плотным рядом изолированных подгрупп конечной длины, является нильпотентной группой конечного рационального ранга. (Возрастающий ряд изолированных подгрупп называется плотным, если между любыми двумя соседними его членами нет изолированных подгрупп).

Основным результатом работы является теорема 3:

Нильгруппа без кручения с условием минимальности для изолированных подгрупп является нильпотентной группой. См. РЖМат, 1954, 1565, 1566. *П. Г. Конторович*

5459. Инфраинвариантные подгруппы. Смирнов Д. М., Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та, 1953, 4, 92—96

Подгруппа H произвольной группы G называется инфраинвариантной в G, если все подгруппы, сопряженные с H, образуют упорядоченное по включению множество. В реферируемой работе показано, что в

локально нильпотентных группах всякая инфраинвариантная подгруппа инвариантна. Вместе с тем в разрешимых группах (а также в ZD-группах) могут существовать инфраинвариантные подгруппы, не являющиеся инвариантными.

В упорядоченной локально нильпотентной группе всякая выпуклая подгруппа инвариантна (уточнение одного из результатов А. И. Мальцева). Группа, все циклические подгруппы которой инфраинвариантны, является гамильтоновой. *В. М. Глушков*

5460. О структуре (M_0)- и (M_u)-модулей. Нагао, Накаяма (On the structure of (M_0)- and (M_u)-modules. Nagao Hirosi, Nakayama Tadasi), Math. Z., 1953, 59, № 2, 164—170 (англ.)

В работе рассматриваются модули над алгеброй A конечного ранга с единицей. Левый A-модуль $\mathfrak{m}$ называется (M_0)-модулем, если каждый левый A-модуль $\mathfrak{M}$, содержащий такой подмодуль $\mathfrak{n}$, что $\mathfrak{M}/\mathfrak{n}$ A-изоморфно $\mathfrak{m}$, является прямой суммой $\mathfrak{n}$ и некоторого A-подмодуля $\mathfrak{m}'$. Левый A-модуль $\mathfrak{m}$ называется (M_u)-модулем, если он служит прямым слагаемым для всякого содержащего его левого A-модуля. В работе даются необходимые и достаточные условия для того, чтобы левый A-модуль был (M_0)- или (M_u)-модулем. Именно, берется разложение алгебры A в прямую сумму далее не разложимых левых идеалов,

$$A = \sum Ae_k,$$

где $\{e_k\}$ — система ортогональных идемпотентов, $\Sigma e_k = 1$, и доказывается, что левый A-модуль $\mathfrak{m}$ тогда и только тогда является (M_0)-модулем, когда он равен прямой сумме конечного или бесконечного числа модулей, A-изоморфных идеалам Ae_k; $\mathfrak{m}$ тогда и только тогда является (M_u)-модулем, когда он равен прямой сумме модулей, A-изоморфных модулям $(e_kA)^*$, т. е. модулям, дуальным идеалам e_kA алгебры A (модуль $\mathfrak{M}^*$, состоящий из всех линейных относительно основного поля Ω отображений данного правого A-модуля $\mathfrak{M}$ в поле Ω, называется дуальным для $\mathfrak{M}$; $\mathfrak{M}^*$ является левым A-модулем: $(a\lambda)u = \lambda(ua)$, где $a \in A$, $u \in \mathfrak{M}$, $\lambda \in \mathfrak{M}^*$). *А. П. Мищина*

5461. Обобщение одной теоремы Фробениуса о групповых характерах. Прокофьев А. Н., Уч зап. Моск. гос. пед. ин-та, 1953, 71, № 1, 93—98

Доказана следующая теорема:

Пусть в группе G конечного порядка дано множество систем уравнений вида

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_r, a_1, a_2, \ldots, a_\sigma) \subset$$

$$\subset \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_r, a_1, a_2, \ldots, a_s)$$

и пусть степень каждого уравнения относительно неизвестного x_i при любом $i = 1, 2, \ldots, r$ делится на фиксированное целое число n_i. Выберем подгруппу H пересечения нормализаторов всех констант данных уравнений и построим сумму

$$\sum \chi(x_1 x_2 \cdots x_r),$$

взятую по всем таким произведениям $x_1 x_2 \cdots x_r$, сомножители $x_1, x_2, \ldots, x_r$ каждого из которых, расположенные в некотором порядке, составляют принадлежащее смежной системе HgH решение данного множества систем уравнений (g — элемент группы G). Тогда сумма

$$\sum \chi(x_1 x_2 \cdots x_r)$$

делится на $\varkappa(G, H, n)$, где n — наименьшее общее кратное чисел $n_1, n_2, \ldots, n_r$.

Относительно терминологии и обозначений см., например, Прокофьев А. Н., Докл. АН СССР, 1949, 65, № 6, 801—804. Эта теорема содержит, как частный случай, известную теорему Фробениуса.

Если χ — какой-нибудь характер конечной группы G, a — элемент этой группы, то целое алгебраическое число $\Sigma\chi(x)$, где сумма берется по всем элементам x группы G, которые удовлетворяют уравнению $x^n = a$, делится на наибольший общий делитель числа n и порядка нормализатора элемента a в группе G. *В. К. Туркин*

5462. Когомологии групп и гомоморфизм подъема. Экман (Cohomology of groups and transfer. Eckmann Beno), Ann. Math., 1953, 58, № 3, 481—493 (англ.)

Подробное изложение алгебраических конструкций, опубликованных автором ранее (РЖМат, 1953, 623). *М. М. Постников*

5463. Нильпотентные полугруппы. Мальцев А. И., Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та, 1953, 4, 107—111

Выводится одно тождество, наличие которого в группе необходимо и достаточно для того, чтобы группа была n-ступенно нильпотентной. Так как в это тождество не входят отрицательные степени элементов, то с его помощью понятие n-ступенной нильпотентности непосредственно обобщается и на полугруппы.

Всякая n-ступенно нильпотентная полугруппа с законом сокращения вложима в n-ступенно нильпотентную группу. Доказательство этого опирается на то, что всякая полугруппа с законом сокращения и хотя бы одним нетривиальным тождеством вложима в группу.

Доказывается, что понятие разрешимости не может быть перенесено в класс всех полугрупп с соблюдением естественных требований. *Е. С. Ляпин*

5464. О мультигруппах, образуемых подмножествами группы. Дицман А. П., Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та, 1953, 71, № 1, 71—79

Рассматриваются разбиения группы G на классы, т. е. подмножества попарно непересекающиеся и удовлетворяющие условиям:

1) Каждый элемент группы G входит только в один класс.

2) Единица группы G образует класс, не содержащий элементов, отличных от единицы.

3) Если K_a — класс, содержащий элемент a, то совокупность элементов группы, обратных элементам K_a, также образуют класс, т. е. $K_a^{-1} = K_{a^{-1}}$.

4) Классы образуют мультигруппу $\bar{G}$ относительно операции умножения классов как комплексов.

Классы, удовлетворяющие условиям 1) — 4), называются мультиклассами группы G. Доказаны следующие теоремы: 1) Мультиклассы группы G тогда и только тогда образуют группу, когда они являются элементами группы G; 2) Группа G тогда и только тогда разрешима, если существует такое разбиение G на мультиклассы, что образуемая ими мультигруппа $\bar{G}$ является абелевой ультрагруппой; 3) Группа тогда и только тогда нильпотентна, когда ее классы сопряженных элементов образуют ультрагруппу *Ю. И. Соркин*

5465. О многообразиях группоидов и луп. Эванс Нёйман (On varieties of groupoids and loops. Evans Trevor, Neumann B. H.), J. London Math. Soc., 1953, 22, г. 3, № 3, 342—350 (англ.)

Группоидом называется множество, замкнутое относительно определенной в нем бинарной операции — умножения. Умножение обозначается через μ и записывается как правый оператор

$$ab\mu.$$

Множество, замкнутое относительно трех определенных в нем операций: μ (умножение), ρ (правое деление), λ (левое деление), записываемых в виде правых операторов, и удовлетворяющее тождествам

$$xy\rho\, y\mu = xy\mu y\rho = x,\quad xy\lambda\mu = xy\mu\lambda = y,$$

называется квазигруппой; если дополнительно удовлетворяется тождество

$$xx\rho = yy\lambda,$$

то имеем лупу. Многообразием группоидов (луп, квазигрупп) называется совокупность всех группоидов (луп, квазигрупп), удовлетворяющих некоторой системе тождеств. Авторы решают поставленную Хигманом и Нёйманом (Higman G., Neumann B. H., Publ. Math. Debrecen, 1952, 2, 215—221) задачу о мощности множества многообразий группоидов (луп, квазигрупп). Мощность множества многообразий группоидов (луп, квазигрупп) континуальна.

Группоид (лупа, квазигруппа) называется степенно ассоциативной, если его каждый моногенный подгруппоид (подлупа, подквазигруппа), т. е. подгруппоид, порожденный одним элементом, ассоциативен. Авторы показывают, что многообразие степенно ассоциативных группоидов (луп, квазигрупп) не может быть охарактеризовано никакой конечной системой тождеств. Этот результат противоположен результату Алберта (Albert A. A., Trans. Amer. Math. Soc., 1948, 64, 552—593) для степенно ассоциативных колец характеристики 0 (некоммутативных) и характеристики взаимно простой с 30 (коммутативных), которые могут быть охарактеризованы двумя простыми тождествами.

Ставится проблема о возможности задания диассоциативных группоидов (луп, квазигрупп), т. е. группоидов (луп, квазигрупп), у которых каждый подгруппоид (подлупа, подквазигруппа) с двумя образующими ассоциативен, конечным числом тождеств. *Ю. И. Соркин*

5466. Построение квазигруппы с неперестановочными отношениями конгруентности. Тревизан (Costruzione di quasigruppi con relazioni di congruenza non permutabili. Trevisan Giorgio), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1953, 22, № 1, 11—22 (итал.)

31-я проблема Биркгофа (Биркгоф Г., Теория структур, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1952, 130) включает в себя три вопроса:

1) Существует ли квазигруппа, отношения конгруентности на которой неперестановочны?

2) Может ли такая квазигруппа быть лупой?

3) Может ли такая квазигруппа быть конечной? 3-й вопрос был отрицательно решен автором в предыдущей работе (Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1950, 19, 367).

В настоящей работе положительно решен первый вопрос, т. е. построена бесконечная квазигруппа, имеющая неперестановочные отношения конгруентности. *Ю. И. Соркин*

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

5467. Числа Эйнштейна. Бейкер (Einstein numbers. Baker G. A.), Amer. Math. Monthly, 1954, 61, № 1, 39—41 (англ.)

Числа Эйнштейна определяются как вещественные числа, по абсолютной величине не превосходящие числа c. На множестве этих чисел рассматриваются операции $\oplus$ и $\odot$, определяемые соотношениями

$$a \oplus b = \frac{a+b}{1+\frac{ab}{c^2}},$$

$$a \odot b = c \operatorname{th}\left[\left(\operatorname{arth}\frac{a}{c}\right)\left(\operatorname{arth}\frac{b}{c}\right)\right].$$

Первая операция рассматривается в теории относительности, причем число c соответствует скорости света, а a и b — относительным скоростям. Показывается, что числа Эйнштейна образуют поле с операциями $\oplus$ и $\odot$. Число c играет для этого поля ту же роль, какую бесконечность играет для поля всех вещественных чисел. Поле вещественных чисел изоморфно отображается на поле чисел Эйнштейна функцией $c \operatorname{th} x$. *М. И. Петрашень*

5468. О разрешимых в радикалах расширениях полей алгебраических чисел. Шафаревич И. Р., Докл. АН СССР, 1954, 95, № 2, 225—227

Излагаются основные этапы доказательства того, что над любым полем алгебраических чисел существует расширение с наперед заданной разрешимой группой Галуа. *Д. К. Фаддеев*

5469. p-расширения локального поля, содержащего $\sqrt[p^M]{1}$. Скопин А. И., Докл. АН СССР, 1954, 95, № 1, 29—32

Рассматриваются нормальные расширения степени p^n (p-расширения) конечного расширения k поля рациональных p-адических чисел R_p ($p \neq 2$).

Пусть k содержит $\sqrt[p^M]{1}$, степень $(k : R_p) = 2\nu$. p-расширение называется m-ступенным, если его группа Галуа имеет главный ряд длины m с элементарными абелевыми факторами.

Для m-ступенных p-расширений при $m \leqslant M$ получены результаты, аналогичные результатам референта (Матем. сб., 1947, 20(62), № 2, 351—363) для p-расширений поля k, не содержащего

корня степени p из 1. Через S_ν обозначается фундаментальная группа замкнутой ориентируемой поверхности рода $\nu+1$, т. е. группа с $2\nu+2$ образующими $a_1, \ldots, a_{2\nu+2}$ и одним соотношением

$$a_1 a_2 a_1^{-1} a_2^{-1} \ldots a_{2\nu+1} a_{2\nu+2} a_{2\nu+2}^{-1} a_{2\nu+1}^{-1} = 1.$$

В S_ν строится ряд нормальных делителей N_l. За N_0 берется S_ν, а N_l порождается коммутаторами и p-ми степенями элементов N_{l-1}. В качестве основного результата устанавливается взаимно однозначное соответствие между m-ступенными p-расширениями ($m \leqslant M$) и нормальными делителями группы $G_m = S_\nu / N_m$, причем если p-расширению K/k соответствует нормальный делитель N, то группа Галуа K/k изоморфна G_m/N.

Аналогичный факт устанавливается для двуступенных расширений, если k содержит корень степени p, но не содержит корень степени p^2 из 1. В этом случае группа S_ν заменяется группой с соотношением

$$a_2^p a_1 a_2 a_1^{-1} a_2^{-1} \ldots a_{2\nu+1} a_{2\nu+2} a_{2\nu+1}^{-1} a_{2\nu+2}^{-1} = 1.$$

И. Р. Шафаревич

5470. О композиции псевдонорм. Кон, Малер (On the composition of pseudo-valuations. Cohn Paul, Mahler Kurt), Nieuw arch. wiskunde, 1953, **1**, № 3, 161—198 (англ.)

Вещественная функция $w(a)$, определенная на коммутативном кольце R с единицей, называется псевдонормой, если: 1) $w(0)=0$, $w(a) \geqslant 0$; 2) $w(a-b) \leqslant w(a)+w(b)$; 3) $w(ab) \leqslant w(a)\,w(b)$. Псевдонорма w называется неархимедовой, если $w(a-b) \leqslant \max(w(a), w(b))$.

На множестве всех псевдонорм кольца R определяются четыре ассоциативные операции:

1) $(w_1 \cdot w_2)(a) = \inf \max_i (w_1(x_i)\, w_2(y_i))$,

2) $(w_1 \odot w_2)(a) = \inf \sum_i w_1(x_i)\, w_2(y_i)$,

3) $(w_1 \times w_2)(a) = \inf \max_i (w_1(x_i), w_2(y_i))$,

4) $(w_1 \otimes w_2)(a) = \inf \sum_i (w_1(x_i) + w_2(y_i))$.

Во всех случаях inf распространяется на все возможные представления a в виде $a = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$; $x_i, y_i \in R$, n — произвольно. Псевдонормы $w_1 \cdot w_2$ и $w_1 \times w_2$ всегда неархимедовы. Введенные операции иллюстрируются на примерах псевдонорм алгебраического числового поля и кольца целых алгебраических чисел.

Псевдонормы w_1 и w_2 называются сильно эквивалентными, если существуют такие константы C_1 и C_2, что $w_1 \leqslant C_1 w_2$, $w_2 \leqslant C_2 w_1$ ($w_1 \leqslant w_2$ означает, что $w_1(a) \leqslant w_2(a)$ при всех a). Устанавливается ряд свойств операций 1)—4) в терминах сильной эквивалентности. Например: для псевдонорм w_1 и w_2 наибольшая псевдонорма (неархимедова псевдонорма), мажорируемая функцией $\min(w_1, w_2)$, сильно эквивалентна $w_1 \odot w_2$ (соответственно $w_1 \cdot w_2$).

Указывается соответствие между идеалами кольца R и псевдонормами, принимающими лишь два значения 0 и 1; при этом сумме идеалов соответствуют операции 1) и 2), а произведению идеалов — операция 3). Ряд теорем посвящен свойствам операций над ограниченными неархимедовыми псевдонормами. Например: если w_1 и w_2 — ограниченные неархимедовы псевдонормы, то $w_1 \cdot w_2$ и $w_1 \odot w_2$ эквивалентны (определяют в R одну и ту же топологию). *З. И. Боревич*

5471. О понятии идеала начальных форм. Норткотт (On the notion of a form ideal. Northcott D. G.), Quart. J. Math., 1953, **4**, № 15, 221—229 (англ.)

Пусть Q — локальное кольцо, $\mathfrak{m} = (u_1, \ldots, u_n)$ — его максимальный идеал (выбранный базис идеала $\mathfrak{m}$ не предполагается минимальным), $K = Q/\mathfrak{m}$ — поле вычетов Q. Форма $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ степени s от неизвестных $X_1, \ldots, X_n$ с коэффициентами из поля K называется начальной формой элемента $a \in \mathfrak{m}^s$, если $a \equiv \varphi(u_1, \ldots, u_n) \pmod{\mathfrak{m}^{s+1}}$, где $\varphi(u_1, \ldots, u_n)$ получается из $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ заменой X_i на u_i и заменой коэффициентов любыми представителями из соответствующих классов вычетов. Это определение обобщает известное определение Крулля (Krull W., J. reine und angew. Math., 1938, **179**, 204 — 226), относящееся к случаю, когда рассматривается минимальный базис идеала $\mathfrak{m}$.

Для идеалов в кольцах многочленов вводится следующее понятие эквивалентности: два идеала $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a}'$ колец $K[X_1, \ldots, X_r]$ и $K[X_1, \ldots, X_s]$ называются H-эквивалентными, если при некотором $q > \max(r, s)$ идеалы $(\mathfrak{a}, X_{r+1}, \ldots, X_q)$ и $(\mathfrak{a}', X_{s+1}, \ldots, X_q)$ кольца $K[X_1, \ldots, X_q]$ могут быть получены один из другого однородным линейным преобразованием неизвестных.

Если $\mathfrak{a}$ — идеал локального кольца Q, то совокупность начальных форм его элементов является идеалом в $K[X_1, \ldots, X_n]$, зависящим от выбора базиса идеала $\mathfrak{m}$.

Доказываются следующие результаты.

1. Если идеалы $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a}'$ колец многочленов $R = K[X_1, \ldots, X_r]$ и $R' = K[X_1, \ldots, X_s]$ H-эквивалентны, то кольца вычетов $R/\mathfrak{a}$ и $R'/\mathfrak{a}'$ изоморфны.

В частности, эквивалентные идеалы имеют одну и ту же размерность и лишь одновременно могут быть простыми или примарными.

2. Любые два идеала начальных форм одного и того же идеала локального кольца эквивалентны.

3. Если локальное кольцо Q' гомоморфно отображено на локальное кольцо Q, причем поля вычетов этих локальных колец по их максимальным идеалам совпадают, и если $\mathfrak{a}'$ есть полный прообраз идеала $\mathfrak{a}$ кольца Q, то идеалы начальных форм идеалов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a}'$ эквивалентны.

4. Если $\mathfrak{a}$ — идеал локального кольца Q и $\mathfrak{a}^*$ — его замыкание в пополнении Q^* кольца Q, то идеалы начальных форм идеалов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a}^*$ эквивалентны.

5. Если $\mathfrak{a}$ — идеал локального кольца R и если его идеал начальных форм прост, то $\mathfrak{a}$ также является простым, причем пополнение кольца $R/\mathfrak{a}$ будет областью целостности.

Рассматривая локальные кольца, соответствующие подмногообразиям неприводимого алгебраического многообразия, автор применяет к ним полученные результаты. В частности, показывается, что если идеал начальных форм подмногообразия W на многообразии V является простым, то V аналитически неприводимо в окрестности W. *А. И. Узков*

5472. Заметка о полном матричном кольце над телом. Хуа Ло-гэн (A note on the total matrix ring over a non-commutative field. Hua Loo-Keng), Roczn. Polskiego towarz. mat. (Ann. Soc. polon. math.), 1952, 25, 188—198 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Пусть K — тело, K_n — кольцо всех матриц порядка n над K, L_n — модуль, порождаемый в K_n элементами вида $[A, B] = AB - BA$. Подмодуль N кольца K_n называется нормальным, если из $A \subset N$ следует $BAB^{-1} \subset N$ для любой невырожденной матрицы из K_n. Кольцо K_n становится кольцом Ли или J-кольцом, если операцию умножения в K_n определить формулами $[A, B] = AB - BA$ или $\{A, B\} = AB + BA$. Доказывается ряд теорем, из которых отметим следующие:

1) Исключая случай $n = 2$ и $K = GF(2)$,

а) любой нормальный подмодуль кольца K_n или содержится в центре K, или содержит L_n,

в) любое нормальное подкольцо кольца K_n содержится в центре K,

с) любой элемент кольца K_n представим в виде конечной суммы элементов вида $BCB^{-1}C^{-1}$;

2) J-кольцо K_n с операцией $\{A, B\}$ есть простое кольцо;

3) Все собственные идеалы кольца Ли K_n содержатся в его центре. *А. И. Ширшов*

5473. Подалгебры свободных коммутативных и свободных антикоммутативных алгебр. Ширшов А. И., Матем. сб., 1954, 34 (76), № 1, 81—88

В работе рассматриваются свободные коммутативные и свободные антикоммутативные алгебры над некоторым полем (ассоциативность умножения не предполагается). Указан метод построения базы в таких алгебрах. Он используется в доказательстве основной теоремы: всякая подалгебра свободных коммутативной и антикоммутативной алгебр сама свободна. *А. Г. Курош*

5474. Представление для тождеств между коммутаторами колец. Маулер (Eine Darstellung für Identitäten zwischen den Kommutatoren eines Ringes. Mauler Heribert), Math. Ann., 1953, 126, № 5, 410—417 (нем.)

С помощью методов комбинаторной топологии дается новое доказательство известной теоремы Биркгофа — Витта о изоморфном представлении произвольной алгебры Ли в некоторой ассоциативной алгебре. Доказывается универсальность полученного представления. Автор ограничивается случаем алгебр конечного ранга. *А. И. Ширшов*

5475. Простые и полупростые почти кольца. Блэкетт (Simple and semisimple near-rings. Blackett D. W.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 5, 772—785 (англ.)

Почти кольцом называется множество N, для элементов которого определены сложение и умножение, подчиняющиеся следующим условиям: 1) по сложению N является группой, 2) умножение ассоциативно, 3) $n_1(n_2 + n_3) = n_1n_2 + n_1n_3$ для любых трех элементов $n_1, n_2, n_3 \in N$. В дальнейшем предполагается дополнительно, что $0 \cdot n = 0$ для всех $n \in N$. Двусторонний идеал почти кольца N определяется как ядро гомоморфизма при обычном определении последнего; при этом оказывается, что двусторонний идеал есть такой нормальный делитель K аддитивной группы почти кольца N, что $NK \subset K$ и $(n_1 + k)n_2 - n_1n_2 \in K$ при любых $n_1, n_2 \in N$ и $k \in K$. Правым модулем почти кольца N называется такая подгруппа M его аддитивной группы, что $MN \subset M$, а правым идеалом — такой нормальный делитель R аддитивной группы, что $(r + n_1)n_2 - n_1n_2 \in R$ при всех n_1, $n_2 \in N$ и $r \in R$. Почти кольцо N, с условием минимальности для правых модулей и не содержащее ненулевых нильпотентных правых модулей, называется полупростым. Простым называется почти кольцо N с условием минимальности для правых модулей, не содержащее собственных двусторонних идеалов и не содержащее ненулевых правых модулей, аннулирующихся справа всеми элементами из N.

В работе получены некоторые результаты относительно полупростых почти колец, аналогичные основным результатам о полупростых кольцах (с условием минимальности). В частности, доказано, что простое почти кольцо будет и полупростым, что полупростое почти кольцо обладает левой единицей и является прямой суммой двусторонних идеалов, каждый из которых представляет собой простое почти кольцо; что полупростое почти кольцо подчиняется условию максимальности для правых идеалов и др. *Л. И. Головина*

5476. О представлении структур. Йоунссон (On the representation of lattices. Jónsson Bjarni), Math. scand., 1953, 1, № 2, 193—206 (англ.)

Относительным произведением бинарных отношений R и S называется бинарное отношение, составленное из пар $\langle x, y \rangle$ таких, что $\langle x, z \rangle \in R$ и $\langle z, y \rangle \in S$ при некотором z. Относительное произведение обозначается символом «;». Рефлексивное, симметричное и транзитное отношение на множестве элементов U называется отношением эквивалентности. Множество всех отношений эквивалентности на множестве U, как известно, образует структуру, в которой сумма двух отношений R и S может быть определена как теоретико-множественное объединение неубывающей последовательности следующих относительных произведений: $R; S, R; S; R, R; S; R; S, R; S; R; S; R, \ldots$

Представлением структуры A называется упорядоченная пара $\langle F, U \rangle$, где U — множество, а F — функция, изоморфно отображающая структуру A на некоторую подструктуру структуры всех отношений эквивалентности на множестве U. Представление называется:

типа 1, если $F(x) + F(y) = F(x); F(y)$

типа 2, если $F(x) + F(y) = F(x); F(y); F(x)$

типа 3, если $F(x) + F(y) = F(x); F(y); F(x); F(y)$ для $x, y \in A$.

Изучаются представления структур типов 1—3. Доказаны теоремы: 1) Если структура A имеет представление типа 2, то A дедекиндова структура; 2) Всякая дедекиндова структура A, имеющая представление типа 1, удовлетворяет следующему условию:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Если } a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 \in A \text{ и если}\\ \quad x = (a_0+b_0)\cdot(a_1+b_1)\cdot(a_2+b_2),\\ \quad y = (a_0+a_1)\cdot(b_0+b_1)\cdot[(a_0+a_2)\cdot(b_0+b_2)+\\ \qquad +(a_1+a_2)\cdot(b_1+b_2)],\\ \text{то} \quad x \leqslant a_0(a_1+y)+b_0(b_1+y);\end{array}\right\}(\alpha)$$

3) Если A — структура всех подпространств проективной плоскости P, то следующие условия эквиваленты: а) A имеет представление типа 1, б) A удовлетворяет условию (α), в) плоскость P дезаргова, г) A изоморфна структуре подгрупп некоторой абелевой группы G; 4) Свободная дедекиндова структура с четырьмя или большим числом образующих не имеет представления типа 1; 5) Структура всех подпространств недезарговой проективной плоскости не изоморфна ни структуре нормальных делителей группы, ни свободной дедекиндовой структуре с четырьмя или большим числом образующих; 6) Всякая дедекиндова структура имеет представление типа 2; 7) Всякая структура имеет представление типа 3.

Теоремой 5) автор частично решает 27-ю проблему Биркгофа (Биркгоф Г., Теория структур, Изд-во иностр. л-ры, М., 1952, 110) и отмечает, что независимо от него к аналогичному результату пришел Шютценбергер (ср. РЖМат, 1954, 2032). Теорема 7) усиливает теорему Уитмена о существовании представления у всякой структуры (Whitman P. M., Bull. Amer. Math. Soc., 1946, 52, 506—522), отличаясь от последней более прозрачным доказательством. В заключение указываются нерешенные вопросы. *Ю. И. Соркин*

5477. Замечания о перестановочности конгруентных отношений. Ван Ши-цян (關於合同關係的可換性. 王世強), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1953, **3**, № 2, 133—141 (кит.; резюме англ.)

Доказываются теоремы:

1. Любые два отношения конгруентности структуры с относительными дополнениями перестановочны.

2. Для того чтобы отношения конгруентности дедекиндовой структуры L с дополнениями образовывали булеву алгебру, необходимо и достаточно, чтобы все нейтральные идеалы структуры L были главными. Эта теорема относится к проблеме 72 Биркгофа. Следующие две теоремы дают полное решение проблемы 31 Биркгофа (Биркгоф Г., Теория структур, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1952, 217, 130).

3. Любые два отношения конгруентности конечной квазигруппы перестановочны.

4. Для любого кардинального числа $\mathfrak{a} \geqslant \aleph_0$ существуют квазигруппы и лупы, имеющие мощность $\mathfrak{a}$, с неперестановочными отношениями конгруентности. *А. Х. Лившиц*

См. также: 5426, 5440, 5490, 5524, 5528, 5541, 5594, 5596, 5664, 5761, 5781—5784, 5787, 5790, 5791

ТОПОЛОГИЯ

5478. О полноте пространств близости. Смирнов Ю. М., Тр. Моск. матем. о-ва, 1954, **3**, 271—306

Подробное изложение работы автора, опубликованной в Докл. АН СССР (РЖМат, 1953, 123). *В. А. Ефремович*

5479. О бикомпактных расширениях в смысле Александрова. Папи (Sur les compactifications d'Alexandroff. Papy Georges), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1953, **39**, № 11, 937—941 (франц.)

Исследуется строение бикомпактных расширений произвольных топологических пространств, причем расширения понимаются в смысле П. С. Александрова (данное пространство R дополняется одной точкой ξ). Эта точка должна быть замкнута. Среди всех получаемых таким образом расширений данного пространства R имеются наибольшее (в нем открыты все открытые в R множества, а также множество $R \cup \xi$) и наименьшее (в нем открыты все открытые в R множества, а также дополнения до $R \cup \xi$ к каждому бикомпактному замкнутому множеству пространства R). *Ю. М. Смирнов*

5480. О топологическом произведении двух компактных пространств. Новак (On the cartesian product of two compact spaces. Novák J.), Fundam. math., 1953, **40**, 106—112 (англ.)

Целью работы является отрицательный ответ на вопрос Чеха, является ли произведение любых двух компактных топологических пространств компактным.

Автор приводит прежде всего доказательство утверждения Поспишила (Pospišil, Ann. Math., 1937, **38**, 845), заключающегося в том, что максимальное бикомпактное (чеховское) расширение $\beta(N)$ множества N всех натуральных чисел имеет мощность гиперконтинуума, а также доказательство более общей неопубликованной теоремы Чеха, которая утверждает, что ту же самую мощность имеет каждое бесконечное замкнутое подмножество пространства $\beta(N)$. Основываясь на этом, автор показывает, что в $\beta(N)$ существуют два таких компактных подмножества A_1 и A_2, что $A_1 \cap A_2 = N$ и $A_1 \cup A_2 = \beta(N)$. Из этого вытекает, что произведение $A_1 \times A_2$ некомпактно. Далее приводится принадлежащая Катетову теорема о том, что произведение компактного и бикомпактного пространств всегда компактно.

Заметим, что вторая часть леммы 1 (стр. 106—108) легко вытекает из первой, а первая известна (Fichtenholz G., Kantorovitsch L., Studia math., 1935, **5**, 69—98; см стр. 80). *E. Marczewski*

5481. Заметка о паракомпактных пространствах. Майкл (A note on paracompact spaces. Michael Ernest), Amer. Math. Soc., 1953, **4**, 831—838 (англ.)

Хаусдорфово пространство называется паракомпактным, если в каждое его открытое покрытие можно вписать локально конечное покрытие. Доказывается, что для паракомпактности регулярного топологического пространства необходимо и достаточно, чтобы в каждое его открытое покрытие можно было вписать открытое покрытие, являющееся объединением счетного числа локально конечных семейств открытых множеств. Из приведенных в работе следствий указанной теоремы отметим следующее: каждое подмножество паракомпактного пространства паракомпактно. *Д. А. Райков*

5482. Некоторое обобщение абсолютных окрестностных ретрактов. Ногути (A generalisation of absolute neighborhood retracts. Noguchi Hiroshi), Kodai Math. Sem. Repts, 1953, № 1, 20—22 (англ.)

Дается следующее обобщение введенного К. Борсуком понятия абсолютного окрестностного ретракта: множество B называется ε-ретрактом множества $A \supset B$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывное отображение множества A в B, являющееся на B ε-сдвигом; если же найдется такая содержащаяся в A окрестность множества B, что B является ее ε-ретрактом, то B называется окрестностным ε-ретрактом множества A; наконец, компакт B называется абсолютным (окрестностным) ε-ретрактом, если любое ему гомеоморфное множество B', содержащееся в каком-либо пространстве A, является ε-ретрактом (окрестностным ε-ретрактом) пространства A. Доказывается целый ряд теорем, аналогичных соответствующим утверждениям К. Борсука (Fundam. math., 1932, **19**, 220—242; 1938, **31**, 154—159). Отметим, например, следующие теоремы: 1) компакт B тогда и только тогда является абсолютным (окрестностным) ε-ретрактом, когда он гомеоморфен некоторому замкнутому ε-ретракту (окрестностному ε-ретракту) гильбертова кирпича; 2) любое непрерывное (гомотопное нулю) преобразование абсолютного (окрестностного конечномерного) ε-ретракта имеет неподвижную точку.

Ю. М. Смирнов

5483. Об одном стягиваемом континууме, который отображается в себя без неподвижной точки. Киносита (On some contractible continua without fixed point property. Kinoshita Shin'ichi), Fundam. math., 1953, **40**, 96—98 (англ.)

Работа содержит положительное решение проблемы, поставленной К. Борсуком: существует ли в гильбертовом пространстве H конус, составленный из отрезков, соединяющих точки компакта $E \subset H$ с некоторой точкой $a \in H$, который можно непрерывно отобразить в себя без неподвижной точки?

Автор показывает, что если существует стягиваемый континуум (т. е. континуум, который непрерывной деформацией по себе может быть переведен в одну точку), отображаемый в себя без неподвижной точки, то вышеуказанная проблема решается положительно. Далее строится такой стягиваемый континуум A, который непрерывно отображается в себя без неподвижной точки. Для этого в трехмерном евклидовом пространстве вводится цилиндрическая система координат (r, φ, z) и определяются множества: $A_1 = \underset{r,\varphi,z}{E}\ [0 \leqslant r < 1,\ z = 0]$, $A_2 = \underset{r,\varphi,z}{E}\ [r = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \varphi,\ 0 \leqslant \varphi < \infty,\ 0 \leqslant z \leqslant 1]$ и $A_3 = \underset{r,\varphi,z}{E}\ [r = 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1]$. Искомый стягиваемый континуум равен $A_1 \cup A_2 \cup A_3$. *А. Л. Лунц*

5484. Исследования по топологии. II. Инагаки (Contribution à la topologie. II. Inagaki Takeshi), Math. J. Okayama Univ., 1953, **2**, 149—184 (англ.)

Реферируемая статья является дальнейшей попыткой (часть I напечатана в том же журнале, 1952, **1**, 129—166) представить счетность в топологии как часть более общей теории; в случае этой общей теории используется частично упорядоченное множество, характеризующее рассматриваемое пространство и определенное следующим образом: топологическое пространство R называется квантитативным, если фиксировано такое множество индексов A, что каждой точке x поставлена в соответствие система окрестностей, состоящая из открытых множеств $v_a(x)$, $a \in A$; полагают $a \geqslant_x b$, если $v_a(x) \subseteq v_b(x)$, и $a \geqslant b$, если $a \geqslant_x b$ для всех $x \in R$. Упорядоченное множество $(A, \geqslant)$ называется характером пространства R; если $(A, \geqslant)$ — направленное множество, то пространство R называется монотонным.

Доказано, что упорядоченное множество $(A, \geqslant)$ соответствует топологии R (Tukey J. W., Convergence and iniformity in topology, Princeton, 1940). Такие понятия, как полнота и компактность, обычно определяемые в метрическом пространстве в терминах последовательностей, определяются в R в терминах функций, заданных на множестве $(A, \geqslant)$ и принимающих значения в R. Доказывается, например, что полное в себе подмножество квантитативного хаусдорфова пространства замкнуто.

Чтобы обобщить понятия категории и борелевского множества, обозначим через $\mathfrak{a}$ мощность множества A и через α наименьшее порядковое число мощности $\mathfrak{a}$. Пространство R называется исключительным, если всякое покрытие пространства A менее чем $\mathfrak{a}$ множествами содержит конфинальное подмножество множества A. При определении борелевских множеств и множеств первой категории используется не более чем $\mathfrak{a}$ подмножеств пространства R; тогда оказывается, что каждое множество первой категории содержится в F_σ первой категории. Если назвать множество $E \subset R$ ординально компактным в случае, когда любая трансфинитная последовательность $\{x_\lambda,\ \lambda < \beta \leqslant \alpha\} \subset E$ имеет по крайней мере одну точку прикосновения в E, то в локально ординально компактном исключительном квантитативном пространстве R множество первой категории не имеет внутренних точек.

Конец первой части работы посвящен рассмотрению связности. Во второй части изучаются равномерные пространства как частный случай квантитативных пространств; значительная часть этих рассмотрений посвящена свойствам отделимости пространства R.

Перевод из Math. Rev., 1953, **14**,, № 10, 1001. *M. M. Day*

5485. Об одной проблеме разрезания областей континуумами. Куратовский, Заранкевич (Sur un problème concernant les coupures des régions par des continus. Kuratowski C., Zarankiewicz C.), Fundam. math., 1952, **39**, 15—24 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (франц.)

На сфере S^2 дано k непересекающихся континуумов $K_1, \ldots, K_k$ и n непересекающихся открытых вязных множеств $R_1, \ldots, R_n$, причем $K_i \cap R_j \neq 0$ для всех пар i, j; все множества $S^2 \setminus R_j$ предполагаются связными. Пусть ν — число таких пар i, j, что $R_j \setminus K_i$ несвязно. Обозначим через S_{kn} минимум числа ν (при переменных K_i и R_j). Гипотеза Заранкевича — Реньи состоит в том, что $S_{kn} = (k-2)(n-2)$ при $k \geqslant 2$, $n \geqslant 2$. В реферируемой работе доказывается справедливость этой гипотезы при $k \leqslant 4$ или при $n \leqslant 4$. В общем случае вопрос остается открытым. *В. А. Ефремович*

5486. К изучению групп гомологий циклических разветвленных накрытий, соответствующих узлу. Планс (Aportación al estudio de los grupos de homología de los recubrimientos cíclicos ramificados correspondientes a un nudo. Plans Antonio), Rev. Real acad. cienc. exact., fis. y natur. Madrid, 1953, **47**, № 2, 161—193 (исп.)

Зейферт показал (Seifert H., Math. Ann., 1935, **110**, 571—592), что одномерная группа гомологий $\mathfrak{H}_g$ g-листного накрывающего пространства (для трехмерного евклидова или сферического пространства R^3), имеющего линией разветвления узел в R^3, есть группа с $2h$ образующими, где h — род поверхности $\mathfrak{F}$, которую можно натянуть на узел без самопересечений в R^3; за эти образующие можно принять одномерный базис гомологий $a_1, \ldots, a_{2h}$ поверхности $\mathfrak{F}$, а соотношения между ними $\sum_{i=1}^{2h} \delta_{ij} a_i = 0$ ($j = 1, \ldots, 2h$) задаются квадратной матрицей $\{\delta_{ij}\} = \Gamma_g - (\Gamma - E)^g$ порядка $2h$, где E — единичная матрица, а Γ — матрица специального вида, определяемая индексами пересечений в R^3 циклов, являющихся представителями классов гомологий $a_1, \ldots, a_{2h}$ на поверхности $\mathfrak{F}$.

В реферируемой статье сначала элементарным образом показывается, что полином $x^g - (x-1)^g$ равен $(2x-1)\mathcal{P}^{(g)}$ при четном g и $\mathcal{P}^{(g)} - 2t\mathcal{P}^{(g-1)}$ при нечетном g, где $\mathcal{P}^{(g)}$ суть полиномы с целыми коэффициентами от $t = x(1-x)$, рекуррентно определяемые формулой $\mathcal{P}^{(g)} = \mathcal{P}^{(g-1)} - t\mathcal{P}^{(g-2)}$, причем $\mathcal{P}^{(1)} = \mathcal{P}^{(2)} = 1$. Это позволяет, заменив переменную x матрицей Γ, выразить при нечетном g матрицу $\{\delta_{ij}\} = \Gamma^g - (\Gamma - E)^g$ в виде целочисленного полинома от матрицы $T = \Gamma(E - \Gamma)$ а при четном g — в виде произведения такого полинома на матрицу $2\Gamma - E$. Показывается, что при помощи элементарных преобразований матрица T приводится к диагональному виду

$$\begin{pmatrix} e_1 & & & & 0 \\ & e_1 & & & \\ & & e_2 & & \\ & & & e_2 \ddots & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & e_h \\ & & & & & e_h \end{pmatrix}$$

и что таким же свойством обладает любой целочисленный полином от T, в частности матрица $\{\delta_{ij}\}$ при нечетном g, что дает теорему:

Одномерное число Бетти нечетнолистного накрытия всегда четно, а его одномерные коэффициенты кручения попарно одинаковы. Для четного g это тоже позволяет сразу явным образом определить числовые инварианты $\mathfrak{H}_g$ по данной матрице Γ.

Далее специально изучается случай узлов рода 1 (род узла есть наименьший род поверхности $\mathfrak{F}$), где все рассматриваемые выше матрицы будут 2-го порядка, что позволяет рассмотреть этот случай более подробно. В частности, здесь уже детерминант γ матрицы Γ при нечетном g (а если γ простое, то при любом g) определяет все группы $\mathfrak{H}_g$ (откуда, согласно результатам Гёрица (Goeritz L., Math. Z., 1933, **36**, 647—654), вытекает, что при простом $\gamma > 0$ узел будет отличен от своего симметричного). Устанавливается, что для узлов рода 1 все $\mathfrak{H}_g$ определяются посредством $\mathfrak{H}_2$. Если $\gamma \neq 1$, то все группы $\mathfrak{H}_g$ конечны (т. е. числа Бетти всех накрытий равны нулю), а при $\gamma = 1$ группы $\mathfrak{H}_g$ при увеличении g периодически повторяются с периодом 6, причем только $\mathfrak{H}_6 = \mathfrak{H}_{12} = \ldots$ есть бесконечная абелева группа с двумя свободными образующими (т. е. здесь число Бетти = 2, а коэффициенты кручения отсутствуют), а остальные $\mathfrak{H}_g$, как и раньше конечны (а именно, $\mathfrak{H}_g$ будет нулевой группой, циклической группой 3-го порядка и произведением двух циклических групп 2-го порядка, когда соответственно $g \equiv \pm 1, \pm 2, 3 \pmod 6$, так что все эти узлы, одним из которых является «трилистник» (т. е. простейший узел), имеют одни и те же $\mathfrak{H}_g$). Показывается, что, кроме случая $\gamma = 1$, периодичность $\mathfrak{H}_g$ (даже если начинать лишь с некоторого значения g) имеет место еще лишь в случае $\gamma = 0$, где все $\mathfrak{H}_g$ будут нулевыми группами, т. е. все замкнуты пути в накрывающих пространствах будут ограничивающими, так что узел в этом случае гомологически неотличим от окружности. *М. Ф. Бокштейн*

5487. Обобщение леммы Шпернера и его приложения к замкнутым покрытиям и неподвижным точкам. Баджемил (An extension of Sperner's lemma, with applications to closed-set coverings and fixed points. Bagemihl F.), Fundam. math., 1953, **40**, 3—12 (англ.)

Приведено предложение, непосредственно вытекающее из леммы Шпернера, и сделаны некоторые очевидные выводы из него. Пусть S_1 — замкнутый n-мерный симплекс, а $S_2, \ldots, S_m$ — открытые n-мерные симплексы, расположенные в S_1, замыкания которых попарно не пересекаются друг с другом и не пересекаются с границей симплекса S_1. Разность $S_1 \setminus (S_2 \cup \ldots \cup S_m)$ автор называет n-мерным m-плексом. Предположим, что вершины каждого симплекса S_i, $i = 1, \ldots, m$, занумерованы числами от 0 до n. Выберем произвольное симплициальное подразделение K рассматриваемого m-плекса и каждой вершине комплекса K поставим в соответствие одно из чисел $0, 1, \ldots, n$, так чтобы для вершин, находящихся на границе каждого из симплексов S_i, были выполнены условия леммы Шпернера. Назовем n-мерный симплекс невырожденным, если его вершины занумерованы всеми числами $0, 1, \ldots, n$. В частности, все симплексы $S_1, \ldots, S_m$ невырождены. Ориентируем все невырожденные

n-мерные симплексы в соответствии с нумерацией их вершин и каждый из них назовем положительным или отрицательным в зависимости от того, соответствует ли его ориентация ориентации симплекса S_1 или противоположна ей. Наконец, обозначим через π и ν число положительных, соответственно отрицательных, симплексов среди симплексов $S_2, \ldots, S_m$, а через ρ_P и ρ_N — число положительных, соответственно отрицательных. симплексов триангуляции K. Автор доказывает формулу $\rho_P + \pi = \rho_N + \nu + 1$ и выводит следствия, аналогичные тем, которые выводятся для симплекса с помощью леммы Шпернера; доказательства этих следствий совершенно аналогичны тем, которые хорошо известны в случае симплекса. Заметим, что данное автором доказательство этой формулы можно значительно упростить: достаточно рассмотреть такое симплициальное разбиение симплекса S_1, которое содержит K в качестве подкомплекса. Далее, следствие 3 (граница m-плекса не является его ретрактом), доказанное автором только для нечетного m, верно при любом m и тривиальным образом доказывается: достаточно взять два одинаковых m-плекса, склеить их границы и рассмотреть получившееся n-мерное многообразие. *В. Г. Болтянский*

5488. О произведении Уайтхеда. Хилтон, Уайтхед (Note on the Whitehead product. Hilton P. J., Whitehead J. H. C.), Ann. Math., 1953, 58, № 3, 429—442 (англ.)

Пусть $\xi \in \pi_m(X)$, $\eta \in \pi_n(X)$, где X—произвольное пространство. Через $[\xi, \eta]$ обозначается уайтхедовское произведение элементов ξ и η (Whitehead J. H. C., Ann. Math., 1941, **42**, 409—428). Доказано, что если $[\xi, \eta] = 0$, то для любых $\alpha \in \pi_p(S^m)$, $\beta \in \pi_q(S^n)$ также $[\xi \circ \alpha, \eta \circ \beta] = 0$. Отсюда следует, что если группа $\pi_{2n+1}(S^{n+1})$ содержит элементы с нечетным инвариантом Хопфа (как известно, для этого необходимо и достаточно, чтобы было $i_n, i_n] = 0$, где i_n — образующая группы $\pi_n(S^n)$), то $[\alpha, \beta] = 0$ для любых $\alpha \in \pi_p(S^n)$, $\beta \in \pi_q(S^n)$. То же равенство имеет место и для $n = 2$ за исключением случая, когда $p = q = 2$.

Бо́льшая часть статьи посвящена изучению гомоморфизма $P : \pi_p(S^n) \to \pi_{p+n-1}(S^n)$, определенного формулой $P_\alpha = [\alpha, i_n]$. Теория этого гомоморфизма оказывается тесно связанной с теорией векторных полей на сферах. Результаты авторов слишком многочисленны и специальны, чтобы приводить их здесь. *М. М. Постников*

5489. Связь между произведениями Уайтхеда и Понтрягина. Замельсон (A connection between the Whitehead and the Pontryagin product. Samelson Hans), Amer. J. Math., 1953, 75, № 4, 744—752 (англ.)

Пусть X — линейно связное и односвязное пространство, а Ω—соответствующее пространство петель, т. е. замкнутых путей в какой-нибудь точке пространства X. В пространстве Ω естественным образом определено непрерывное умножение и, следовательно, определено понтрягинское умножение классов целочисленных сингулярных гомологий: если $a \in H_r(\Omega)$, $b \in H_s(\Omega)$, то их понтрягинское произведение обозначается через $a * b \in H_{r+s}(\Omega)$. С другой стороны, определен гомоморфизм $\tau : \pi_n(X) \to H_{n-1}(\Omega)$, являющийся комбинацией известных гомоморфизмов $\pi_n(X) \to \pi_{n-1}(\Omega)$ и $\pi_{n-1}(\Omega) \to H_{n-1}(\Omega)$. Наконец, в гомотопических группах $\pi_n(X)$ пространства X определено умножение Уайтхеда: если $\alpha \in \pi_{p+1}(X)$, $\beta \in \pi_{q+1}(X)$, то их произведение Уайтхеда обозначается через $[\alpha, \beta] \in \pi_{p+q+1}(X)$. Доказывается, что

$$\tau[\alpha, \beta] = (-1)^p (\tau\alpha * \tau\beta + (-1)^{pq+1} \tau\beta * \tau\alpha).$$

Приведены два доказательства этой формулы. Первое вполне элементарно и основано на известной интерпретации произведения Уайтхеда, предложенной Гуревичем и Дж. Уайтхедом. Второе оставляет открытым вопрос о знаке $(-1)^p$ (который, впрочем, случаен и определяется выбором отображения τ) и основано на некоторой общей теореме о гомотопических группах относительных расслоенных пространств. *М. М. Постников*

5490. Обобщение одной теоремы де Рама и интегральное выражение инварианта Хопфа. Кервер (Extension d'un théorème de G. de Rham et expression de l'invariant de Hopf par une intégrale. Kervaire Michel), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 23, 1486—1488 (франц.)

Пусть A^p — некоторая дифференциальная форма степени p (класса C^1) на n-мерном многообразии X^n (класса C^2). Для любой p-мерной сингулярной дифференцируемой цепи c^p положим

$$a^p(c^p) = \int_{c^p} A^p.$$

Тем самым в многообразии X^n определится p-мерная ko цепь a^p, соответствующая форме A^p. Автор находит необходимые и достаточные условия для того, чтобы ko цепь, соответствующая внешнему произведению двух форм, была $\cup$-произведением ko цепей, соответствующих формам—сомножителям. Найденные условия автоматически выполнены для замкнутых форм, так что известная теорема де Рама (о том, что внешнему произведению замкнутых форм отвечает $\cup$-произведение соответствующих ko циклов) является частным случаем теоремы автора.

Применяя доказанную теорему к известному выражению инварианта Хопфа при помощи $\cup$-умножения, автор получает для инварианта Хопфа интегральное выражение, совпадающее при $n = 2$ с выражением, полученным ранее другим методом Уайтхедом. *М. М. Постников*

5491. О двух теоремах плоской топологии. Вон (On two theorems of plane topology. Vaughan H. E.), Amer. Math. Monthly, 1953, 60, № 7, 462—468 (англ.)

Реферируемая статья посвящена уточнению и исправлению доказательств некоторых теорем плоской топологии, которые используются при выводе теоремы Коши в книге Кноппа (Knopp K., Theory of functions, I, New York, 1945). Приведены некоторые очевидные теоремы плоской топологии.

А. С. Пархоменко

5492. О понятии дуги в теории множеств. Кассина (Sulla nozione di «arco» nella teoria degli insiemi. Cassina Ugo), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 303 (итал.)

Краткое резюме сообщения со ссылкой на две работы Кассина (Rend. Accad. naz. dei XL, 1951, 2, 139—153; Rend. Ist. Lombardo, 1951, 15 (84), 75—110).

5493. Основные понятия общей топологии. Калаби (Notions fondamentales de topologie générale. Calabi L.), Rev. questions scient., 1953, 14, oct., 542—558 (франц.)

Вторая часть популярной статьи об основных понятиях абстрактной топологии (РЖМат, 1954, 2540). *Ю. М. Смирнов*

5494 К. Топология полиэдров и комбинаторная топология комплексов. Рейдемейстер (Topologie der Polyeder und kombinatorische Topologie der Komplexe. Reidemeister Kurt, XI + 196S., 69 Fig., Akademische Verl. Ges., Leipzig, 1953, 14 DM) (библ.)

5495 К. Введение в теорию гомотопий. Хилтон (An introduction to homotopy theory. Hilton P. J., VIII + 142 pp., Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, № 43, Cambridge, University Press, 1953) (англ.)

Автор в предисловии следующим образом определяет цели своей книги: «В настоящее время не существует учебников по гомотопической теории, после изучения которых новичок в этой области математики будет в состоянии приступить к чтению оригинальных работ, часто чрезвычайно запутанных. Эта монография предназначена для заполнения этой бреши. Она не содержит полного изложения предмета (например, новейшие достижения французской школы не включены, исключая краткие замечания в конце пятой главы), но можно надеяться, что читатель, знакомый с «Введением в топологию» Лефшеца (Lefschetz S., Introduction to topology, Princeton, University Press, 1949), получит из первых шести глав этой книги достаточное представление об основных идеях гомотопической теории».

Первая глава носит вводный характер и содержит определения некоторых основных понятий теории. Вторая глава посвящена различным методам определения абсолютных и относительных гомотопических групп и операций, осуществляемых фундаментальными группами в высших гомотопических группах. Третья глава, озаглавленная «Классические теоремы теории гомотопий», содержит в основном следующие три теоремы: теорему о симплициальной аппроксимации, теорему, утверждающую, что гомотопические классы отображений n-мерной сферы на себя полностью определяются их брауэровской степенью, и теорему Гуревича о том, что в $(n-1)$-связном полиэдре n-мерные гомотопическая и гомологическая группы изоморфны. Фактически эта глава содержит только формулировки и объяснения смысла и значения этих теорем. За детальным доказательством автор отсылает читателя к учебнику Лефшеца (см. предыдущую ссылку).

Следующая глава содержит описание гомотопической последовательности пары, состоящей из пространства и подпространства, доказательство того, что эта последовательность точна и некоторые применения этого обстоятельства.

Пятая глава посвящена гомологическим соотношениям в расслоенных пространствах, причем особое внимание уделено хопфовским расслоениям сфер. Шестая глава трактует об инварианте Хопфа и надстройке Фрёйденталя для отображений сфер и о некоторых обобщениях этих понятий. Большинство более трудных доказательств опущено, за подробностями читатель отсылается к оригинальным мемуарам.

Последние две главы несколько отличны от первых шести и посвящены гомотопической теории полиэдров. Седьмая глава излагает принадлежащее Уайтхеду понятие ячеечного полиэдра, а восьмая — посвящена задаче определения $(n+1)$-мерной гомотопической группы $(n-1)$-связного ячеечного полиэдра $(n>2)$. Эта задача рассматривается в основном для иллюстрации общих понятий, введенных в предыдущих главах.

Книга в целом принесет большую пользу всем изучающим теорию гомотопий. Наиболее заметным дефектом книги, быть может, является отказ от изложения теории препятствий к распространению и гомотопности непрерывных отображений. Например, теорема Хопфа о классификации отображений n-комплекса в n-сферу нигде в книге даже не упомянута. Также досадно, что автор не изложил более подробно новейших идей и не показал их важное значение. *W. S. Massey*

Перевод из Math. Rev., 1954, 15, № 1, 52

См. также: 5462, 5470, 5474, 5507, 5663, 5764, 5774, 5775

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

5496. Мера геометрических множеств. Данжуа (La mesure des ensembles géométriques. Denjoy Arnaud), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 7, 753—756 (франц.)

Мера множества $E \subset U_n$ называется евклидовой, если она остается инвариантной при изометричных перемещениях множества E в пространстве U_n n измерений. Неевклидову меру автор называет условной (conventionnelle). В евклидовых и римановых пространствах размерности n геометрически естественным образом вводится p-мерная мера (евклидова или условная) для всех p, меньших n. Свойства введенных мер не изучаются.

p-мерная мера была введена также Хаусдорфом (Гуревич В., Волмэн Г., Теория размерности, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1948). *А. Д. Тайманов*

5497. Замечание о неизмеримых точечных множествах. Кралик (Bemerkungen über nicht-meß-

bare Punktmengen. Králik D.), Publs mathematicae, 1952, 2, № 3—4, 229—231 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (нем.)

Излагается известное трансфинитное построение вполне несовершенного множества A (т. е. множества, не содержащего совершенных подмножеств) см. Хаусдорф, Теория множеств, ОНТИ, М. — Л., 1937, 196), дополнение которого $\overline{A}$ также вполне несовершенно. Отсюда выводится, что любое множество положительной внешней меры содержит неизмеримое подмножество. *Ф. В. Широков*

5498. Заметка о метрических свойствах емкости. Каметани (A note on a metric property of capacity. Kametani), Natural Sci. Rept Ochan. Univ., 1953, 4, 51—54 (англ.)

Реферируемая статья является небольшим дополнением к другой статье автора (Japan. J. Math., 1945, 19).

Рассматривается евклидово пространство любого числа измерений $\geqslant 2$. Для функции $h(x)$, возрастающей, непрерывной в $[0, \infty]$ и такой, что $h(0) = 0$, строится по известному правилу h-мера Хаусдорфа. Через H обозначается семейство всех мер Хаусдорфа, а через $M(E)$ — семейство всех обычных мер μ, определенных на ограниченном борелевском множестве E с $\mu(E) = 1$. Под α-емкостью множества E понимается число $C^{\Phi}(E) = \frac{1}{V^{\Phi}(E)}$, где $V^{\Phi}(E) = \inf_{\mu \in M(E)} V_{\mu}^{\Phi}(E)$, $V_{\mu}^{\Phi}(E) = \sup_{x \in R^{(n)}} U^{\mu}(x)$, а $U^{\mu}(x) = \int \Phi(\rho(x, y))\, d\mu(y)$ — потенциал с $\Phi(r) = r^{-\alpha}$ ($\alpha < 0$) и $\rho(x, y)$ — расстояние между точками x и y.

Определение внешней и внутренней α-емкостей любого множества дается через α-емкость замкнутых и открытых множеств по известному правилу.

Если внешняя и внутренняя α-емкости множества совпадают, то говорят, что множество имеет α-емкость. Устанавливается следующая теорема:

Если E — произвольное множество внешней α-емкости нуль, то h-мера Хаусдорфа множества E также равна нулю для всех $h \in H$ таких, что $\int_0^h h(r)\, r^{-1-\alpha}\, dr < +\infty$, где $\eta > 0$ — некоторое число.

П. Л. Ульянов

5499. О расширении области определения функции, непрерывной на замкнутом множестве. Бончини (Su una estensione del campo di esistenza di una funzione continua in un insieme chiuso. Bononcini Vittorio E.), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 23 (итал.)

Утверждается, что функция, удовлетворяющая условию Липшица на замкнутом множестве C из интервала S n-мерного пространства, может быть продолжена на $S \setminus C$ так, что на S она будет удовлетворять условию Липшица, а продолжение на $S \setminus C$ будет квазилинейным.

Подробное изложение результатов было опубликовано ранее (Riv. mat. Univ. Parma, 1951, 2, 365—374). *А. А. Конюшков*

5500. Основы общей теории k-мерного интеграла в n-мерном пространстве. Каччопполи (Elementi di una teoria generale dell'integrazione k-dimensionale in uno spazio n-dimensionale. Caccioppoli Renato), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 41—49 (итал.)

Отмечая недостаточность существующих работ, автор излагает краткие предварительные соображения о возможном пути построения k-мерной меры и интеграла в n-мерном пространстве (на примерах $n = 3$; $k = 1, 2$). На примерах вводятся понятия k-мерно ориентированных множеств и их мер в n-мерном пространстве. *П. И. Романовский*

5501. Об интегральных теоремах Гаусса и Стокса. I. Кримкеберг (Über den Gaußschen und den Stokesschen Integralsatz. I. Krickeberg Klaus), Math. Nachr., 1953, 10, № 5—6, 261—314 (нем.)

Детально изучаются различные вопросы, относящиеся к обобщениям интегральной формулы Остроградского — Гаусса.

Пусть G — открытое множество в n-мерном пространстве, $\varkappa$ — n-мерная мера Лебега, F — граница G. На F ищется действительная функция σ и мера μ такие, что для каждой функции α определенного класса выполняется равенство

$$\int_G \partial_i \alpha\, d\varkappa = \int_F \alpha\sigma\, d\mu$$

($\partial_i \alpha$ обозначает частную производную от α по i-му аргументу). Исследуются достаточные и в существенном необходимые условия существования таких пар (μ, σ). При определенных ограничениях, налагаемых на G, рассматриваются системы необходимых и достаточных условий, которым должна удовлетворять μ (или σ), чтобы для нее существовала соответствующая σ (или μ). Изучаются аналогичные условия выполнимости равенства

$$\int_G \operatorname{div} a\, d\varkappa = \int_F (a, s)\, d\mu$$

для определенного класса векторных функций a, где s — векторная функция на F и (a, s) — скалярное произведение a и s.

Автор использует терминологию и обозначения своей предыдущей работы (РЖМат, 1953, 146). *П. И. Романовский*

5502. Об условии интегрируемости по Риману. Рademахер (On the condition of Riemann integrability. Rademacher Hans), Amer. Math. Monthly, 1954, 61, № 1, 1—8 (англ.)

5503. Квадрируемость непрерывных поверхностей, заданных в полярных координатах. Костовский А. Н., Укр. матем. ж., 1954, 6, № 1, 81—104

Рассматривается вопрос о квадрируемости в смысле Лебега поверхности, заданной в сферических (полярных) координатах уравнением $\rho = f(\alpha, \beta)$, где $f(\alpha, \beta)$ непрерывна (ρ — радиус-вектор, α — широта и β — долгота).

Основываясь на теории интеграла Беркилла и понятии функции ограниченной вариации в смысле Тонелли (Сакс С., Теория интеграла, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1949, гл. V, § 4), автор доказывает следующую теорему:

Теорема. I. Необходимым и достаточным условием квадрируемости непрерывной поверхности $\rho = f(\alpha, \beta)$ в ее части, относящейся к прямоугольнику

$$D\begin{pmatrix} 0 \leqslant \alpha_1 < \alpha \leqslant \alpha_2 < \frac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant \beta_1 < \beta \leqslant \beta_2 < 2\pi \end{pmatrix},$$

является ограниченность вариации в смысле Тонелли функции $f(\alpha, \beta)$ на прямоугольнике D.
II. Если кусок поверхности $S(D)$, относящийся к D, квадрируем, то его площадь

$$|S(D)| \geqslant \iint_D f(\alpha, \beta) \times$$

$$\times \sqrt{f^2(\alpha, \beta)\cos^2\alpha + \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)^2 \cos^2\alpha + \left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)^2}\, d\alpha d\beta.$$

III. Пусть $\Gamma_r \subset D$ есть круг радиуса r с центром в точке $(\alpha, \beta) \in D$, тогда

$$\lim_{r\to 0} \frac{|S(\Gamma_r)|}{\pi r^2} = S'(\alpha, \beta)$$

существует почти всюду в D и почти всюду имеет место

$$S'(\alpha, \beta) = f(\alpha, \beta) \times$$

$$\times \sqrt{f^2(\alpha, \beta)\cos^2\alpha + \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)^2 \cos^2\alpha + \left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)^2}.$$

А. С. Кованько

5504. О тождественности двух определений площади. Чеккони (Sulla identià fra due definizioni di area. Cecconi Jaures), Boll. Unione mat. ital., 1953, сер. 3, **8**, № 2, 130—137 (итал.)

Рассматривается непрерывная поверхность S с представлением $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in H$, где H — единичный круг плоскости uv $(0 \leqslant u^2 + v^2 \leqslant 1)$.

Доказывается, что рассматривавшаяся Рейфенбергом площадь $A(S)$ поверхности (Reifenberg E. R., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1951, **47**, 687—698) совпадает с лебеговой площадью $L(S)$; при этом не предполагается, что $L(S)$ конечна.

Доказательство равенства $A(S) = L(S)$ (при условии $L(S) < +\infty$), данное Рейфенбергом (см. цитированную статью), как заметил Федерер (H. Federer), содержит неточности (см. реф. Федерера в Math. Rev., 1953, **14**, 363). *Г. Я. Поплавская*

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

5505. О направлениях, сингулярных по отношению к точечному множеству. Страшевич (Sur les directions singulières par rapport à un ensemble de points. Straszewicz S.), Fundam. math., 1952, **39**, 128—130 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (франц.)

Направление называется сингулярным по отношению к данному точечному множеству E, расположенному в трехмерном пространстве, если ни одна прямая этого направления не содержит одну и только одну точку этого множества. Доказывается теорема, предложенная В. Серпинским, о том, что множество направлений, сингулярных по отношению к замкнутому ограниченному точечному множеству, не более чем счетно. При доказательстве используются свойства выпуклых множеств. Как показывает автор, всякое направление, сингулярное для некоторого ограниченного замкнутого множества E, сингулярно также для множества $\Gamma(E)$ (наименьшего содержащего E выпуклого множества). Поэтому доказательство проводится для сингулярных направлений выпуклого множества.

Отмечается, что доказанная теорема без труда распространяется на евклидовы пространства любого числа измерений. *Р. Ю. Мацкина*

5506. Некоторые замечания об отношении между множествами и элементами. Гинсберг (Some rémarks on a relation between sets and elements. Ginsburg S.), Fundam. math., 1952, **39**, 176—178 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Пусть E есть некоторое непустое множество и $H = \{h\}$ — непустое семейство его подмножеств. Пусть R есть такое отношение, что xRh ставит в соответствие каждому h один и только один элемент x множества E, и пусть G_α — подмножество множества E, состоящее из тех элементов x множества E, для которых отношением xRh каждый x поставлен в соответствие, по крайней мере, $\aleph_\alpha$ элементам h множества H. Проблема состоит в том, чтобы оценить мощность множества G_α при различных условиях, наложенных на множество H, и при различных $\aleph_\alpha$.

На простом примере показывается ошибочность следующего утверждения (Fodor G., Ketskemety I., Fundam. math., 1950, **37**, 249—250): если E есть счетное множество, H — семейство всех его конечных подмножеств и $\alpha = 0$, тогда мощность G_α есть $\aleph_0$. Доказана следующая теорема:

Если $H = \{h\}$ есть семейство всех конечных подмножеств несчетного множества E и $\aleph_\alpha < \overline{\overline{E}}$, тогда мощность G_α есть $\overline{\overline{E}}$. Для $\aleph_\alpha = \overline{\overline{E}}$ G_α может быть пустым.

Допуская бесконечные множества в качестве элементов множества H, автор доказывает, что если E есть некоторое множество и $H = \{h\}$ есть семейство подмножеств множества E, каждое из которых имеет мощность $\aleph_\nu \leqslant \overline{\overline{E}}$, и если $\aleph_\alpha = \overline{\overline{E}}$, тогда $G_\alpha = \overline{\overline{E}}$. *З. И. Ковлова*

5507. О введении некоторой специальной упорядоченности в деревьях. Хоэйзель, Шмидт (Über die Konstruktion einer gewissen totalen Ordnung in Bäumen. Hoheisel Guido, Schmidt Jürgen), Arch. Math., 1953, **4**, № 4, 261—266 (нем.)

Приводится конструкция, с помощью которой удается упорядочить множество, если оно само частично упорядочено и если специальным образом частично упорядочено множество некоторых его подмножеств.

Подмножество A частично упорядоченного множества E называется его «началом», если из $x \in A$ и $y \leqslant x$ следует $y \in A$. Множество E называется «деревом», если всякое его начало есть упорядоченное множество. В дальнейшем E есть дерево. Два элемента $a, b \in E$ «конгруентны по модулю M», где $M \subset E$, если существует $x \in E$ такой, что $M < x$, $x \leqslant a$, $x \leqslant b$. Конгруентность есть отношение эквивалентности и разбивает множество верхних граней M в E на классы конгруентности по модулю M. Множество $K \subset E$ называется «узлом» в E, если: 1) K — начало в E, 2) в E существуют по меньшей мере два класса конгруентности по модулю K. Если K — узел, то классы конгруентности по модулю K называются «ветвями» по модулю K, а их множество называется «вилкой» узла. Через $K_{a_1, a_2, \ldots, a_n}$ обозначается совокупность всех элементов множества E, равных или предшествующих одновременно всем элементам $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Доказывается, что K_{ab} — узел, если a и b несравнимы в E.

Через Z_{ab}, где a несравнимо с b, обозначается та из ветвей узла K_{ab}, которая содержит a.

Основная теорема: пусть множество $\mathfrak{Z}$ всех ветвей Z частично упорядочено таким образом, что каждая вилка упорядочена. Если в E ввести новое отношение $a \trianglelefteq b$, которое имеет место тогда и только тогда, когда либо $a \leqslant b$, либо $Z_{ab} \leqslant Z_{ba}$ (в смысле частичной упорядоченности в $\mathfrak{Z}$), то множество E упорядочено отношением $\trianglelefteq$. *А. Л. Лунц*

5508. **Об одном свойстве упорядоченных множеств. Гросман** (Sur une propiété des ensembles ordonnés. Grossmann Aleksandar), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1953 сер. 2, 8, № 1, 24—26 (франц.; резюме хорв.)

Пусть E—упорядоченное множество. Порядковое число α, по определению, можно представить в E, если E обладает вполне упорядоченным подмножеством типа α. Через ΓE обозначается верхняя грань порядковых чисел, которые можно представить в E. Пусть мощность E не превосходит $\aleph_\xi$. Тогда, очевидно, $\Gamma E \leqslant \omega_{\xi+1}$. Доказывается, что если $\Gamma E = \omega_{\xi+1}$, то E есть сумма упорядоченного множества J упорядоченных множеств C_i $\left(\text{т. е. } E = \sum_{i \in J} C_i\right)$, где J таково, что каждый его интервал H обладает свойством $\Gamma H = \omega_{\xi+1}$. *В. А. Успенский*

5509. **Проблема континуума. Эррера** (Le problème du continu. Errera Alfred), Atti Accad. Ligure, 1952, 9, 176—183 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (франц.)

Замечания, имеющие целью показать правдоподобие принятия гипотезы континуума или ее отрицания как нового постулата в теории множеств. *F. Bagemihl*

Перевод из Math. Rev., 1954, **15**, № 1, 18.

5510. **Об одном свойстве теоретико-множественных операций. Щегольков Е. А.**, Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та, 1953, **71**, № 1, 81—91

Операция называется инвариантной относительно порядка, если результат ее применения к любой последовательности множеств не изменяется от перестановки членов в этой последовательности. Таковы, например, операции сложения, пересечения, нахождения верхнего и нижнего пределов последовательности множеств.

Всякая конечная или бесконечная совокупность натуральных чисел $(n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$, включая и пустую совокупность, называется цепью. Цепи различаются по их структуре:

1. Конечная цепь, содержащая q элементов, называется цепью типа q.

2. Бесконечная цепь, дополнение которой до всей совокупности натуральных чисел Z бесконечно, называется цепью типа $Z - \omega$.

3. Бесконечная цепь, дополнение которой до совокупности Z конечно и содержит q элементов, называется цепью типа $Z - q$.

Всякая цепь имеет один из указанных типов. Пусть R есть некоторое множество и

$$E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots \tag{1}$$

есть некоторая последовательность его подмножеств. Рассмотрим какой-либо элемент x множества R и выделим все натуральные числа n, для которых $x \in E_n$. Совокупность U_x этих чисел называется цепью элемента x относительно последовательности (1).

Пусть N — некоторое множество цепей U, Φ_N — теоретико-множественная операция с базой N (Хаусдорф Ф., Теория множеств, ОНТИ НКТП СССР, М. — Л., 1937, гл. V). Доказывается, что для того чтобы база N определяла теоретико-множественную операцию, инвариантную относительно порядка, необходимо и достаточно, чтобы вместе со всякой цепью U, входящей в базу N, в эту базу входили все цепи того же типа, что и U. Частным видом теоретико-множественной операции является δs-операция с базой N (см. предыдущую ссылку).

Для последовательности (1) вводятся понятия обобщенной k-суммы $S_k(E_n)$, определяемой как $\sum_{U \in N} \prod_{n \in U} E_n$, где N — множество всех цепей типа k, и частного k-нижнего предела $\underline{\lim}_k (E_n)$ как совокупности всех тех элементов $x \in R$, которые входят во все множества последовательности (1), за исключением не более k ее множеств.

Показывается, что операции нахождения обобщенной k-суммы, верхнего, нижнего предела и частного k-нижнего предела и только такие δs-операции инвариантны относительно порядка.

Составная операция $\Phi_0(\Phi_k)$ над последовательностью множеств, образованная из инвариантных δs-операций $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \ldots, \Phi_k, \ldots$ и произвольной δs-операции Φ_0, всегда будет инвариантной δs-операцией и, следовательно, всегда приводит к одной из операций, указанных выше.

Основываясь на результатах исследования инвариантных δs-операций и баз теоретико-множественных операций, инвариантных относительно порядка, автор указывает общую формулу для результатов всех теоретико-множественных операций, инвариантных относительно порядка:

$$\Phi(E_n) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k [S_k(E_n) - S_{k+1}(E_n)] +$$

$$+ B[\overline{\lim}(E_n) - \underline{\lim}(E_n)] + D\underline{\lim}_0(E_n) + \sum_{k=1}^{\infty} M_k[\underline{\lim}_k(E_n) - \underline{\lim}_{k-1}(E_n)],$$

где A_k, B, D, M_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — параметры, принимающие значения множества R (основного) и пустого множества. *З. И. Козлова*

5511. Замечание об униформизации плоских аналитических множеств. Ватанабе (Une remarque sur l'uniformisation des ensembles analytiques plans. Watanabe Hideaki), Tôhoku Math. J., 1953, сер. 2, 5, № 1, 79—82 (франц.)

В одной из работ Н. Н. Лузина (Lusin N., Mathematica, 1930, 4, 54—66; см. также Арсенин В. Я., Ляпунов А. А., Успехи матем. наук, 1950, 5, № 5(39), 78) доказано, что всякое плоское аналитическое множество можно униформизировать множеством $A_{\rho\sigma\delta}$.

Автор данной работы уточняет это утверждение. С этой целью вводится понятие множества A_τ как дополнения к множеству A_ρ. Тогда класс множеств $A_{\tau\delta}$ образует подкласс класса множеств $A_{\rho\sigma\delta}$.

Доказывается, что всякое плоское аналитическое множество униформизируется множеством $A_{\tau\delta}$.

В работе имеются некоторые опечатки. *З. И. Козлова*

5512. Алгебраическое исследование аналитических и квазианалитических операций. Лось (Recherches algèbriques sur les opérations analytiques et quasi-analytiques. Łoś J.), Roczn. Polskiego towarz. mat. (Ann. Soc. polon. math.), 1952, 25, 131—139 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (франц.)

Операция над множествами $H = \Phi(X_1, \ldots, X_\xi, \ldots)$ $(\xi < \alpha, X_\xi \in \boldsymbol{X}; X_\xi \subset E; H \subset E)$ называется квазианалитической (аналитической), если принадлежность точки множеству H определяется всецело тем, каким из множеств X_ξ она принадлежит и каким не принадлежит (во втором случае независимо от точки) (Канторович Л. В., Ливенсон Е. М., Fundam. Math., 1932, 18, 214). Иначе (Marczewski E., Colloquium. math., 1948, 1, 197—202), операция квазианалитическая, если

$$\Phi(X_1, \ldots, X_\xi, \ldots) \dot{-} \Phi(Y_1, \ldots, Y_\xi, \ldots) \subset \subset \sum_{\xi<\alpha} (X_\xi \dot{-} Y_\xi)$$

($\dot{-}$ обозначает симметрическую разность). Задача автора — дать иное (алгебраическое) определение тех же классов операций.

Пусть A — некоторое множество; φ — операция класса α над A, если $\varphi(a_1, \ldots, a_\xi, \ldots)(a_\xi \in A, \xi < \alpha)$ есть элемент множества A. Пара $<A, \varphi>$ называется алгеброй. Алгебра $\Gamma = <A, \varphi>$ называется аналитической (квазианалитической), если существуют множество E, семейство $\boldsymbol{X}$ его подмножеств и аналитическая (квазианалитическая) операция Φ на $\boldsymbol{X}$ такие, что алгебра $<\boldsymbol{X}, \Phi>$ изоморфна алгебре Γ. В работе устанавливаются условия того, чтобы данная алгебра Γ была одного из указанных видов. В первом случае они состоят (теорема 2) в том, что имеется множество гомоморфизмов A на двухточечное множество (сохраняющих φ), которые позволяют различить любые два элемента A. *Л. В. Канторович*

5513. Таинственная бесконечность. Длоугий (Tajemné nekonečno. Dlouhý Zbyněk), Mat.-přírodověd. rozhl., 1953, 32, № 6, 183—188 (чеш.)

Популярная статья с примерами эквивалентных множеств. *А. А. Конюшков*

5514 К. Полное упорядочение несчетного множества и решение континуум-проблемы. Саарнио (Die Wohlordnung einer nichtabzählbaren Menge und die Lösung des Kontinuumproblems (Abhandlungen der Gesellschaft für Lögik und ihre Anwendungen № 1). Saarnio U., 59 pp., Helsinki, 1953) (нем.)

Автор пытается примитивными средствами решит континуум-проблему. В книге много грубых ошибок и нет ни одного строгого доказательства. *А. С. Есенин-Вольпин*

5515 РЕЦ. Статьи по основаниям теории трансфинитных чисел. Кантор (Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers. Cantor Georg, VII + 211 pp., Dover Publications, New York, 1952, 2.75 doll.) [**Рецензия: Гудстейн** (Goodstein R. L.), Math. Gaz., 1954, 38, № 323, 70—71 (англ.)]

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

5516. О сходимости тригонометрических рядов. Джваршейшвили А. Г., Сообщ. АН ГрузССР, 1954, 15, № 2, 65—68

По определению суммируемая функция $f(x) \in V_p$, если для некоторого целого $p > 0$

$$|\Delta^p(a_n)| < \frac{M}{n},$$

$$|\Delta^p(b_n)| < \frac{M}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где M — постоянное число, a_n и b_n — коэффициенты Фурье функции $f(x)$ и

$$\Delta^p(a_n) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_p^k a_{n+p-k}$$

($\Delta^p(b_n)$ выражается аналогично).

[Автору целесообразно было бы ввести класс V_0, полагая в вышеприведенном определении $\Delta^0(a_n) = a_n$, $\Delta^0(b_n) = b_n$. *Прим. реф.*]

Из определения непосредственно следует, что если $f(x) \in V_p$, а сопряженная функция $F(x) \in L(0, 2\pi)$, то $F(x) \in V_p$.

Без подробного доказательства приводятся следующие теоремы:

Теорема 1. Если функция $f(x) \in V_p$, $p \geqslant 0$, то ее ряд Фурье почти всюду сходится на отрезке $[-\pi, \pi]$ к $f(x)$.

При $p = 0$ теорема 1 сводится к теореме Харди (Харди Г., Расходящиеся ряды, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1951, 156). В силу теоремы Плеснера из теоремы 1 следует, что и сопряженный ряд будет сходиться почти всюду.

Теорема 2. Если $f(x) \in L(0,2\pi)$ и для некоторого $p \geqslant 0$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \{[\Delta^p(a_n)]^2 + [\Delta^p(b_n)]^2\} \ln n < \infty,$$

то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится почти всюду на отрезке $[-\pi, \pi]$ к $f(x)$.

При $p = 0$ теорема 2 сводится к теореме Колмогорова — Селиверстова (Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М. — Л., 1939, 251—253).

П. Л. Ульянов

5517. К обобщению одной теоремы Т. Вана. (В подлиннике Т. Ванга.) **Жаки И. Е.**, Уч. зап. Сталинградского гос. пед. ин-та, 1953, № 3, 42—51

Пусть $f(x)$ есть периодическая с периодом 2π суммируемая функция на интервале $(0,2\pi)$. Обозначим через $\sigma_n^r(x)$ чезаровские средние целого порядка r ряда Фурье функции $f(x)$ и положим, что

$$\Phi_0(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x),$$

$$\Phi_s(t) = \int_0^t \Phi_{s-1}(u)\,du, \quad s = 1, 2, \ldots$$

Доказывается следующая теорема:

Если в точке $x \in (0,2\pi)$ функция $f(x)$ удовлетворяет при $t \to 0$ условиям

$$\int_0^t u^{-r-1} |\Phi_{r+1}(u)|\,du = o(t),$$

$$\int_0^t u^{-r} |\Phi_r(u)|\,du = O(t),$$

то

$$\sum_{k=0}^{n} |\sigma_k^r(x) - f(x)|^2 = o(n \lg n), \quad n \to \infty.$$

В случае $r = 0$ это есть обобщение одной теоремы Вана (Wang F. T., Duke Math. J., 1945, 12, 77—87). *А. Г. Джваршейшвили*

5518. О некоторых тригонометрических рядах. IV. Идзуми (Some trigonometrical series, IV. Izumi Shin-ichi), Tôhoku Math. J., 1953, сер. 2, 5, № 1, 18—21 (англ.)

Сас (Szász O., Bull. Amer. Math. Soc., 1944, 50, 587—595, 856—867) нашел несколько достаточных критериев для равномерной сходимости тригонометрических рядов в точке и на отрезке. В реферируемой статье даны ответы на вопросы, которые были поставлены Сасом. Именно, приводятся конкретные примеры, доказывающие следующие теоремы:

Теорема 1. Существует последовательность $\{a_n\}$ такая, что $na_n \to 0$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt \tag{1}$$

не является всюду сходящимся ни в какой окрестности точки $t = 0$.

Теорема 2. Существует последовательность $\{a_n\}$ такая, что $na_n \to 0$, а ряд (1) сходится для всех t, но не является непрерывной функцией в точке $t = 0$.

В этом случае построение примера аналогично тому, как это делали для ряда из синусов Харди и Литлвуд (Proc. London. Math. Soc., 1918, 18, 224—226).

Теорема 3. Существует последовательность $\{a_n\}$ такая, что $na_n \to 0$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд (1) сходится в точке $t = 0$ неравномерно.

Теорема 4. Существует последовательность $\{a_n\}$ такая, что

$$(n+1)s_{n+1} - ns_n \geqslant -p \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где $s_n = a_1 + \ldots + a_n$, p — положительное число, а ряд (1) не является равномерно сходящимся в точке $t = 0$.

В формулировке этой теоремы автору следовало бы указать, что $\{a_n\}$ удовлетворяет тем же требованиям, что и в теореме 1, в противном случае теорема тривиальна (например, достаточно положить $a_n = 1$).

Теорема 5. Существует последовательность $\{a_n\}$ такая, что

$$\sum_{\nu=n}^{2n} |a_n| = o(n), \quad s_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = o\left(\frac{1}{\ln n}\right),$$

а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ не суммируем (R_1).

В работе имеется ряд опечаток. *П. Л. Ульянов*

5519. О некоторых тригонометрических рядах. V. Идзуми (Some trigonometrical series, V. Izumi Shin-ichi), Tôhoku Math. J., 1953, сер. 2, 5, № 1, 29—33 (англ.)

Известно (Marcinkiewicz J., Zygmund A., Fundam. math., 1937, 28, 157—160), что существует периодическая функция $f(x) \in L^p(0,1)$ $(1 \leqslant p < 2)$ такая, что суммы Римана $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(x + \frac{k}{n}\right)$ для почти всех x не сходятся к интегралу от функции f. В качестве такой функции указанные авторы берут по существу

$$f(x) \sim \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{\sqrt{k}} \cos 2\pi kx \text{ при } x \not\equiv 0 \pmod 1.$$

В реферируемой работе дается более полная характеристика поведения сумм Римана для функ-

ций, представимых аналогичными рядами. Именно, доказываются теоремы:

Теорема 1. Пусть интегрируемая периодическая функция $f(x)$ имеет ряд Фурье вида

$$f(x) \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n x}{\sqrt{n}\,(\ln n)^{\alpha}}. \qquad (1)$$

Тогда ее суммы Римана

$$F_n(x, f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(x + \frac{k}{n}\right)$$

для почти всех x расходятся при $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$ и сходятся для почти всех x к интегралу от f при $\alpha > \frac{1}{2}$.

Теорема 2. Пусть $f(x)$ — функция с рядом (1), тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n^2(x, f)$$

сходится для почти всех x при $\alpha > 1$ и расходится для почти всех x при $\alpha \leqslant 1$.

Теорема 3. Пусть

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx,$$

где a_k — выпуклая нуль-последовательность. Если

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{[n^2 \ln n]} a_k \neq O(1) \text{ при } n \to \infty,$$

то римановы суммы функции $f(x)$ расходятся почти всюду. Если же для некоторого $\beta > 1$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{[n^2 (\ln n)^{\beta}]} a_k \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

то римановы суммы почти всюду сходятся к нулю.

П. Л. Ульянов

5520. О некоторых следствиях теоремы Титчмарша. Волибнер (Sur certains corollaires du théorème de Titchmarsh. Wolibner W.), Studia math. (Warszawa), 1953, 14, № 1, 107—110 (франц.)

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — комплексные функции на $[0, 2\pi]$

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

$$g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (c_n \cos nx + d_n \sin nx), \quad (b_0 = d_0 = 0),$$

причем

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 < +\infty,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n|^2 < +\infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |d_n|^2 < +\infty. \qquad (1)$$

Коэффициенты Фурье B_n для функции

$$h(x) = \int_0^x f(y)\, g(x-y)\, dy$$

записываются так:

$$B_n = \frac{\pi}{2}(a_n d_n + c_n b_n) + \frac{a_n c_n + 3 b_n d_n}{4n} - \frac{2 a_0 c_0}{n} + \sum_{n \neq m = 1}^{\infty} \frac{n(a_m c_m - b_m d_m)}{m^2 - n^2} + \sum_{n \neq m = 0}^{\infty} \frac{m(b_n d_m - b_m d_n) - n(a_n c_m - a_m c_n)}{m^2 - n^2}$$

для $n > 0$; подобным образом выражаются коэффициенты A_n. Для того чтобы $h(x) = 0$ почти всюду на $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, необходимо и достаточно, чтобы

$$A_n = 0, \; B_n = 0 \; (n = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (2)$$

Но уравнения (2) при фиксированных c_n и d_n линейны относительно a_n и b_n.

Разлагая нечетную часть $f(x)$ в ряд по косинусам на $[0, \pi]$, получаем следующее необходимое условие для того, чтобы $f(x) = 0$ почти всюду на $[0, \pi]$:

$$a_0 = -\frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{2k+1}}{2k+1},$$

$$a_{2m} = -\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1) b_{2k+1}}{(2k+1)^2 - 4m^2}, \qquad (3)$$

$$a_{2m+1} = -\frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k b_{2k}}{4k^2 - (2m+1)^2}.$$

Теорема Титчмарша (Titchmarsh E. E., Fourier integral, II, 1948, 324th.151,) может быть сформулирована так: Если $h(x) = 0$, $0 \leqslant x \leqslant \lambda$, при интегрируемых f и g на $[0, \lambda]$, то хоть одна из функций $f(x)$ и $g(x)$ равна нулю почти всюду на $0 \leqslant x \leqslant \lambda/2$ (РЖМат, 1953, 1156).

Из этого следует: если b_n, c_n, d_n удовлетворяют (1), а константы c_n и d_n не удовлетворяют (3). (где a_n заменено на c_n, а b_n на d_n), то система (2) линейных уравнений с бесконечным множеством неизвестных a_n может иметь только решение (3). если числа a_n удовлетворяют (1).

Если $g(x) \neq 0$ в окрестности 0, то теорема Титчмарша становится тривиальной и тогда получается:

Если ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| + |d_n|$$

сходится и

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \neq 0,$$

то система (2) линейных уравнений с бесконечным множеством неизвестных a_n, b_n не имеет никакого ненулевого решения, если a_n и b_n удовлетворяют условию (1).

Если предположить $f(x)$ и $g(x)$ четными, то система уравнений (2) принимает вид

$$a_n c_n = 0 \ (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\sum_{n+m=0}^{\infty} \frac{a_n c_m + c_n a_m}{m^2 - n^2} = 0 \ (n = 1,2, \ldots),$$

а формулы (3) принимают вид

$$a_n = 0, \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Обозначая через p_k $(k = 1, 2, \ldots)$ значения n, для которых $a_n \neq 0$, и через q_k значения n, для которых $c_n \neq 0$, получаем:

Не существует двух непустых последовательностей p_k, q_k натурального ряда без общих элементов, для которых системы

$$\sum_k \frac{x_k}{p_k^2 - q_l^2} = 0 \ (l = 1, 2, \ldots),$$

$$\sum_l \frac{y_l}{q_l^2 - p_k^2} = 0 \quad (k = 1,2, \ldots)$$

имели бы ненулевые решения $\{x_k\}$, $\{y_l\}$ с $\Sigma |x_k|^2 < \infty$, $\Sigma |y_l|^2 < \infty$. *Н. К. Бари*

5521. Ряд Фурье из класса H, расходящийся почти всюду. Суноути (A Fourier series which belong to the class H diverges almost everywhere. Sunouchi Gen-ichiro), Kodai Math. Sem. Repts, 1953, № 1, 27—28 (англ.)

Слегка дополняя рассуждения Харди и Рогозинского (Hardy G. H., Rogosinski W. W., Fourier series, 2-nd ed., Cambridge Tracts № 38, 1949, 70—72), автор получает пример ряда Фурье, который вместе со своим сопряженным принадлежит L и расходится почти всюду на $(0, 2\pi)$. Этот результат несколько усиливает известный пример А. Н. Колмогорова. *Ф. В. Широков*

5522. Абсолютная суммируемость по Чезаро ортогональных рядов. Цутикура (Absolute Cesàro summability of orthogonal series. Tsuchikura Tamotsu), Tôhoku Math. J., 1953, сер. 2, № 1, 52—66 (англ.)

Ряд называется абсолютно суммируемым $|C, \alpha|$, если сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\sigma_{n+1}^{\alpha} - \sigma_n^{\alpha}|,$$

где σ_n^{α} — чезаровские суммы порядка α. Известна (Wang F. T., Duke Math. J., 1942, 9, 567—572) теорема:

1) Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)(\lg n)^{1+\varepsilon} \qquad (1)$$

сходится для некоторого $\varepsilon > 0$, то тригонометрический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (2)$$

суммируем $|C, \alpha|$ почти всюду для $\alpha > \frac{1}{2}$;

2) Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)(\lg n)^{2+\varepsilon}$$

сходится для некоторого $\varepsilon > 0$, то ряд (2) суммируем $\left|C, \frac{1}{2}\right|$ почти всюду;

3) Если $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \ n^{1-2\alpha} (\lg n)^{1+\varepsilon}$$

сходится для некоторого $\varepsilon > 0$, то ряд (2) суммируем $|C, \alpha|$ почти всюду, причем число $\varepsilon > 0$ в условии не может быть опущено.

В реферируемой работе доказывается, что и в предложениях 1) и 2) число $\varepsilon > 0$ необходимо. Даны также некоторые достаточные условия для суммируемости, из которых легко выводится теорема Вана.

Известно, что суммируемость $|C, 1|$ ряда Фурье не есть локальное свойство, т. е. суммируемость ряда Фурье от $f(x)$ в точке $x = x_0$ не определяется одним лишь поведением функции в окрестности точки x_0. Автор указывает достаточные условия, при которых абсолютная суммируемость в точке оказывается локальным свойством. Отметим одну из теорем такого рода. Пусть

$$\varphi_x(t) = f(x + t) + f(x - t) - 2f(x)$$

и

$$\Phi_x^{(p)}(t) = \int_0^t |\varphi_x(u)|^p \, du.$$

Теорема. Если $f \in L^p$ $(p > 1)$ и для некоторого $\varepsilon > 0$ в точке x

$$\Phi_x^{(p)}(t) = O\left(|t| \left(\lg \frac{1}{|t|}\right)^{-p-\varepsilon}\right)$$

при $t \to 0$, то ряд Фурье для f суммируем $|C, r|$ $(r > 1/p)$ в точке x. *Н. К. Бари*

5523. О приближении непрерывной функции. Виола (Sull'approssimazione delle funzioni continue. Viola Tullio), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 244—247 (итал.)

Пусть на плоскости заданы точки $\{P_i(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$, причем

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b. \qquad (1)$$

Пусть $\{\Phi_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ — последовательность абсолютно непрерывных функций на (a, b), удовлетворяющих условиям: $\Phi_i(a) = 0$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, и $\Phi_i'(x) = \varphi_i(x)$, где $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ — ортонормальная замкнутая (в смысле среднего квадратического) система функций на (a, b).

Гидзетти (Ghizzetti A., Atti Reale Accad. Sci. Torino, 1944—1945, **80**, 225—230) рассматривал следующий способ приближения функции. Пусть $p>0$— целое достаточно большое число, тогда можно единственным образом определить числа $\{c_i\}_{i=0}^{n+p-1}$ так, чтобы график функции

$$g_p(x)=y_0+\sum_{i=0}^{n+p-1} c_i\Phi_i(x) \qquad (2)$$

проходил через точки $\{P_i\}_{i=0}^{n}$ и чтобы одновременно $\int_a^b [g_p'(x)]^2\,dx$ достигал минимума среди всех функций вида (2). Пусть $\gamma(x)$ — график ломаной, проходящей через точки $\{P_i\}_{i=0}^{n}$. Гидзетти доказал, что $\lim_{p\to\infty} g_p(x)=\gamma(x)$ равномерно на (a, b).

В реферируемой статье приводится без доказательства несколько теорем, касающихся поведения $g_p(x)$ при $p\to\infty$. В частности, при некоторых дополнительных условиях на функции $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ сформулирована следующая теорема:

Пусть $f(x)$ имеет непрерывную производную на (a, b). Возьмем произвольный интервал (a', b'), содержащийся внутри (a, b). Тогда по заданному $\varepsilon>0$ можно найти такое $\delta>0$, что для любого разбиения интервала (a, b) вида (1), для которого $\max_{i=0,1,\ldots,(n-1)}(x_{i+1}-x_i)\leqslant\delta$, можно найти такое целое число $p>0$, что как только $p>\bar{p}$, то одновременно на (a', b') выполняются неравенства $|f(x)-g_p(x)|<\varepsilon$ и $|f'(x)-g_p'(x)|<\varepsilon$, где $g_p(x)$ построены для точек $P_i(x_i, f(x_i))$, $i=0, 1, \ldots, n$. *Д. Л. Берман*

5524. Компактные группы и обобщенные почти периодические функции. Доссе (Groupes compacts et fonctions presque périodiques généralisées. Doss Raouf), Bull. sci. math., 1953, сер. 10, **77**, 186—194 (франц.)

Пусть M — обычное среднее на $(-\infty, \infty)$, а $\overline{M}$ — среднее, при вычислении которого берется верхний предел. Автор обозначает через D класс функций $f(t)$ $(-\infty<t<\infty)$ таких, что: 1) каждая последовательность $f(t+\tau_n)$ $(n=1,2,\ldots)$ компактна в смысле метрики $\rho(f, g)=\overline{M}\{|f-g|\}$; 2) для каждого a существует периодическая с периодом a функция $f_a(t)$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\overline{M}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(t+ka)-f_a(t)\right|\right\}=0.$$

Доказывается, что $D\subset B$, где B — класс почти периодических функций Безиковича (т. е. пределов в смысле $\rho(f, g)$ тригонометрических многочленов). Доказательство основывается, с одной стороны, на аппроксимации $\overline{M}\{|g|\}$ $(g\in D$ фиксирована) числами вида $M\{g(t)x(t)\}$, где $x(t)$ — почти периодическая функция Бора (их совокупность обозначим через U) такая, что $|x(t)|\leqslant 1$, и, с другой стороны, на аппроксимации равномерно по $x(t)$, $|x(t)|\leqslant 1$, линейного функционала $G(x)=M\{g(t)x(t)\}$ $(x\in U)$ функционалами вида $Y(x)=M\{y(t)x(t)\}$, где $y\in U$.

Для установления возможности последней существенно используется интерпретация функционала типа G как линейного непрерывного функционала на пространстве всех непрерывных функций на компактной группе, связанной с аддитивной группой вещественных чисел (Вейль А., Интегрирование в топологических группах и его применения, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1950, 142, 154—156).

Автор указывает, что им также получено прямое доказательство совпадения классов D и B.

Ю. М. Березанский

5525. Об абсолютной сходимости ортогональных рядов. I. Стечкин (On absolute convergence of orthogonal series. I. Stečkin S. B.), Amer. Math. Soc. Translation, № 89, 1953, 11 pp. (англ.)

Перевод из Матем. сб., 1951, **29** (**71**), 225—232.

Перевод из Math. Rev., 1954, **15**, № 1, 28.

5526. К вопросу о построении функции, наименее уклоняющейся от нуля. Пинскер И. Ш., Докл. АН СССР, 1954, **95**, № 1, 21—24

Под функциями, среди которых ищется наименее уклоняющаяся от нуля, в работе понимаются непрерывные действительно-значные функции $\Delta(x)$, определенные на компакте G и принадлежащие к некоторому интерполяционному классу $\Omega_n(G)$. Это последнее понятие в трактовке реферируемой работы является дальнейшим развитием аналогичного понятия, лежащего в основе предшествующей работы того же автора и Е. П. Нолодворского (Успехи матем. наук, 1951, **6**, № 6 (46), 174—181). Именно, в определениях данной работы основное интерполяционное свойство функций $\Delta(x)$ класса Ω_n, вместе с некоторым свойством непрерывной зависимости от интерполяционных данных, выполняется уже, вообще говоря, не для всяких подмножеств $m_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, составленных из n точек компакта G, а лишь для некоторой совокупности «невырождающихся» подмножеств этого вида. Таким образом, здесь только для невырождающихся подмножеств $(x_1, \ldots, x_n)$ гарантируется при произвольном наборе чисел y_i $(i=1, \ldots, n)$ существование функции $\Delta(x)\in\Omega_n$, удовлетворяющей условиям $\Delta(x_i)=y_i$.

Формулируется без доказательств ряд предложений, обобщающих для класса Ω_n соответствующие предложения 8-й главы монографии референта (Про методи найкращого, в розумінні Чебишова, наближеного представлення функцій, Видавництво Укр. АН, Київ, 1938), где рассматриваемый алгоритм (2-й алгоритм) численного построения решений чебышевской задачи указан не только для функций одного переменного, но и для ограниченных функций нескольких переменных, зависящих линейным образом от параметров.

Обобщаются также некоторые результаты М. И. Морозова (Изв. АН СССР, сер. матем., 1952, **16**, № 1, 75) и Я. Л. Геронимуса (О применении методов Чебышева к задаче уравновешивания механизмов, Гостехиздат, М.— Л., 1948).

Функции $\Delta(x)$ класса Ω_n представимы в виде $\Delta(x; a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где a_i — вещественные параметры. Однако примеры, указываемые автором, не выходят за пределы случая линейной зависимости от параметров. Заметим еще следующее: автор

говорит об «указанном построении (Δ)-последовательности», которое «является численным методом...», между тем как в статье в действительности не указано алгоритма для осуществления такого построения, а идет речь лишь о фактах существования.
Е. Я. Ремез.

5527. Приближения с наименьшим максимумом погрешности. Селфридж (Approximations with least maximum error. Selfridge R. G.), Pacif. J. Math., 1953, **3**, № 1, 247—255 (англ.)

Рассматривается вопрос о наилучшем приближении функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ с помощью функций класса G, имеющих вид

$$Q\left[K(x)\sum_{i=0}^{n} a_i x_i^{p_i}\right] \quad (0 = p_0 < p_1 \cdots < p_n),$$

где K и Q — заданные функции.

Функция K выбирается так, чтобы устранить точки, осложняющие поведение $f(x)$, например, точки с бесконечной производной. Предполагается, что $Q(y)$ имеет обратную функцию $P(y)$ с непрерывной первой производной $P'(y) \neq 0$. Пусть

$$e(x) = \frac{f(x) - g(x)}{h(x)},$$

где $h(x)$ — непрерывная положительная функция на $[a, b]$.

Теорема. Величина $l = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |e(x)|$ достигает наименьшего значения среди функций $g \in G$, если: 1) на отрезке $[a, b]$ существуют $n+2$ точки $x_0 < x_1 \ldots < x_{n+1}$ такие, что $e_j = e(x_j)$, $|e_j| = l$, $e_j = t_j e_0$; 2) величины $(-1)^j t_j h(x_j) A_j^n / K(x_j)$ все отличны от нуля и сохраняют знак, причем

$$A_k^n(x) = \begin{vmatrix} 1 & x_0^{p_1} & \ldots & x_0^{p_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{k-1}^{p_1} & \ldots & x_{k-1}^{p_n} \\ 1 & x_{k+1}^{p_1} & \ldots & x_{k+1}^{p_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{n+1}^{p_1} & \ldots & n_{n+1}^{p_n} \end{vmatrix}$$

Далее указывается итерационный метод нахождения функции наилучшего приближения, но сходимость итерационного процесса не доказана.

Пример. $\sin x \approx 0{,}997491\, x - 0{,}1565191\, x^3$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Максимальная погрешность достигается в точках 0,3; 0,8; 1,0 и не превышает по абсолютному значению $5 \cdot 10^{-4}$.
С. Г. Селиванова.

5528. Об условиях того, чтобы бесконечно дифференцируемая функция была многочленом. Кородинас, Суньер-и-Балагер (Sur des conditions pour qu'une fonction infiniment dérivable soit un polynome. Corominas Ernest, Sunyer i Balaguer Ferran), C. r. Acad. sci., 1954, **238**, № 5, 558—559 (франц.)

Приводятся четыре теоремы, обобщающие теорему анализа о том, что функция, одна из производных которой тождественно равна нулю, является алгебраическим многочленом.

Пусть функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема на $[a, b]$.

Теорема 2. Если для каждого $x \in L \subset [a, b]$ существует целое $\nu = \nu(x) \geqslant 0$ такое, что

$$f^{(\nu)}(x) = 0,$$

то $f(x)$ может не быть многочленом в том и только в том случае, если дополнительное к L множество содержит совершенное подмножество.

Теорема 3. Пусть H — не более чем счетное множество действительных чисел. Если для каждого $x \in [a, b]$ существует целое $\nu = \nu(x) \geqslant 0$ такое, что

$$f^{(\nu)}(x) \in H,$$

то $f(x)$ есть многочлен.

Теорема 4. Пусть $\{\varphi_k(x)\}$ — счетное множество квазианалитических функций, принадлежащих к одному и тому же классу, и $\nu(x)$ и $\lambda(x)$ — целые числа такие, что

$$f^{(\nu(x))}(x) = \varphi_{\lambda(x)}^{(\nu(x))}(x);$$

тогда существует λ_0 такое, что разность $f(x) - \varphi_{\lambda_0}(x)$ есть многочлен.
Я. С. Фельдман.

5529 Д. О достаточных условиях сходимости ряда Фурье почти всюду. Кайдаш Н. М. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. обл. пед. ин-т, М., 1954

См. также: 5424, 5492, 5624, 5626, 5640

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

5530. О суммах рядов комплексных чисел. Ханани (On sums of series of complex numbers. Hanani Haim), Pacif. J. Math., 1953, **3**, № 4, 695—709 (англ.)

Комплексное число $C = A + iB$ называется достижимой (attainable) точкой ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ ($c_k = a_k + ib_k$), если существует последовательность $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k = \pm 1$ ($k = 1, 2, \ldots$) такая, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k c_k = C$.

Изучаются множества достижимых точек произвольных числовых рядов с комплексными членами.
И. Е. Жак.

5531. Об одном преобразовании формальных рядов. I. II. Вейнгарден (A transformation of formal series. I. II. Wijngaarden A. van), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1953, A56, № 5, 522—543; Indagationes math., 1953, 15, № 5, 522—543 (англ.)

Предлагается новый общий метод суммирования расходящихся рядов и улучшения сходимости сходящихся рядов. Дана функция $f(z)$, представимая в некоторой области D комплексной плоскости интегралом

$$f(z)=\int_0^\infty F(t)\,e(z,t)\,dt, \qquad (1)$$

где $F(t)$ — функция, аналитическая для $t\geqslant 0$, $F(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{F^{(k)}(0)}{k!}t^k$, а ядро $e(z,t)$ удовлетворяет условиям:

1) $\int_0^\infty t^k e(z,t)\,dt<\infty$, $\int_0^\infty t^k S^{(k)}(t)\,e(z,t)\,dt<\infty$, $k\geqslant 0$, $z\in D$;

2) существует подобласть $D^*\subset D$, в которой

$$\int_0^\infty t^k\,|e(z,t)|\,dt<\infty,$$

$$\int_0^\infty t^k\,|S^{(k)}(t)\,e(z,t)|\,dt<\infty,\quad k\geqslant 0,$$

причем фиксированная функция $S(t)$ аналитична для $t\geqslant 0$ и $S^{(k)}(0)\neq 0$. С функцией $f(z)$ ассоциируется ряд

$$F\equiv\sum_{k=0}^{\infty}\frac{F^{(k)}(0)}{k!}\int_0^\infty t^k e(z,t)\,dt\sim f(z)$$

(возникающий из представления (1) разложением $F(t)$ в степенной ряд и перестановкой процессов интегрирования и суммирования), и рассматриваются альтернированные разности

$$c_k=(-1)^k\Delta^k r_0=\sum_{h=0}^{k}(-1)^h C_k^h r_h,$$

$$r_h=\frac{F^{(h)}(0)}{S^{(h)}(0)},\quad h=0,1,2,\ldots.$$

Преобразование T ряда F определяется как

$$TF\equiv\sum_{k=0}^{\infty}c_k s_k(z),$$

где

$$s_k(z)=\int_0^\infty S_k(t)\,e(z,t)\,dt,\quad S_k(t)=\frac{(-1)^k}{k!}t^k S^{(k)}(t).$$

Доказывается несколько достаточных условий сходимости TF к $f(z)$, в частности:

Теорема 2. Если $S(t)$ аналитична не только для $t\geqslant 0$, но и в полуплоскости $\operatorname{Re} t>0$, причем существуют числа $A\geqslant 0$ и $p\geqslant 0$ такие, что в окрестности $t=0$ и в полуплоскости $\operatorname{Re} t>0$ имеет место неравенство $|S(t)|\leqslant A(1+|t|)^p$, и если

$$|c_k|\leqslant B(1+k)^q, \qquad (2)$$

где $B\geqslant 0$ и $q\geqslant 0$ не зависят от k, то для всех $z\in D^*$ $TF=f(z)$. Для проверки выполнения последнего условия теоремы 2 существенна.

Теорема 8. Для того чтобы имело место неравенство (2), необходимо и достаточно, чтобы функция

$$G(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k r_k t^k$$

была аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} t>-\frac{1}{2}$ и существовали бы числа $A\geqslant 0$ и $p\geqslant 0$ такие, что в этой полуплоскости

$$|G(t)|\leqslant A\left(1-\left|\frac{t}{1+t}\right|\right)^{-p}.$$

Доказывается (теорема 9), что если $S(t)=(1+\alpha t)^{-1}$ $(\operatorname{Re}\alpha>0)$ и функция $F(t/\alpha)$ удовлетворяет условиям, наложенным на функцию $G(t)$ в теореме 8, то $TF=f(z)$.

В зависимости от выбора функций $S(t)$ и $e(z,t)$ получаются различные преобразования T. В частности, при $S(t)=e^{-t}$, $e(z,t)=ze^{-zt}$ T есть преобразование Эйлера. Более сильным является преобразование (Ser J., Bull. sci. math., 1936, сер. 2, 60, 199 — 202; 1937, 61, 74—81; 1938, 62, 171—182), для которого $S(t)=(1+t)^{-1}$, $e(z,t)=ze^{-zt}$. Для последнего преобразования $s_k(z)=z\int_0^\infty(1+t)^{-k-1}\times$ $\times e^{-zt}dt$, $k\geqslant 0$ $(s_0(z)=-ze^z\operatorname{Ei}(-z))$. Оно используется для вывода следующих разложений:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}dt=1-\frac{e^{-z^2}}{2\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}2^{-2k}C_{2k}^k\,s_{2k}(2z^2),$$

$$E(a,z)=\operatorname{arsh}\frac{z}{a}-K_0(a)+$$

$$+\frac{1}{z}e^{-\sqrt{a^2+z^2}}\sum_{k=0}^{\infty}2^{-2k}C_{2k}^k\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)^{2k}s_{2k}\left(\frac{z^2}{\sqrt{a^2+z^2}}\right),$$

где

$$E(a,z)=\int_0^z\frac{1-e^{-u}}{u}\,d\xi,\quad u=\sqrt{a^2+\xi^2}.$$

Первое из них справедливо для $|\arg z|<\frac{\pi}{4}$, второе для вещественных $z>0$ и $a>0$. Приводятся примеры вычислений при помощи этих разложений ($\Phi(1)$ с 12 знаками, $E(4,3)$ с 10 знаками), а также разложения для функций $\sqrt{\frac{2z}{\pi}}e^zK_0(z)$ и

$$f(z)=z\int_0^\infty\frac{e^{-\sigma^2}}{z+\sigma}\,d\sigma,$$

в которых коэффициенты c_k не выражаются в замкнутом виде, а подлежат вычислению (приводятся значения первых 16 коэффициентов для $\sqrt{\frac{2z}{\pi}}e^z K_0(z)$ и первых 38 коэффициентов для $f(z)$). *В. И. Левин*

5532. Оценки частичных сумм степенного ряда. Берг (Abschätzungen von Potenzreihenteilsummen. Berg Lothar), Ber. Math.-Tagung, Berlin, 1953, 193—196 (нем.)

Приводится степенной ряд $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$, представляющий в $|z|<1$ ограниченную функцию, такой, что $a_0 + a_1 + \ldots + a_n \neq o(\log n)$. Как отмечает автор, его пример проще ранее опубликованных примеров (Bohr H., Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl., **1916**, 276—291, **1917**, 119—128; Neder L., Math. Z., 1921, **11**, 115—123).

Полное доказательство не приводится.

А. А. Конюшков

5533. К теории полиномов Чебышева. Мор (Zur Theorie der Tschebyscheffschen Polynome. Mohr Ernst), Ann. Scuola norm. sup. Pisa, 1952, **6**, № 3—4, 245—253 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (нем.)

Хеузер установил следующую связь между полиномами Чебышева и полиномами Фабера (Heuser P., Math. Z., 1949, **51**, 574—585).

Пусть функция

$$x = \psi(t) = t + \frac{a_1}{t} + \frac{a_2}{t^2} + \ldots$$

реализует конформное отображение круговой области $|t|>r_0$ на некоторую односвязную окрестность точки $x=\infty$; C_r — кривая, соответствующая в силу отображения окружности $|t|=r$ $(r>r_0)$;

$$t_n(r, x) = x^n + \ldots$$

— многочлен Чебышева, наименее уклоняющийся от нуля в области, ограниченной кривой C_r. Пусть, с другой стороны, $\{p_n(x)\}$ — последовательность полиномов Фабера, порождаемых функцией $x=\psi(t)$.

В таком случае имеет место равенство

$$t_n(r, x) = p_n(x) + b_1(r)\, p_{n-1}(x) + \ldots + b_{n-1}(r)\, p_1(x) + b_n(r),$$

причем справедливы предельные соотношения:

$$\lim_{r\to\infty} b_\nu(r)\, r^{n-\nu} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Автор предлагает новый метод доказательства указанного утверждения. *В. Л. Гончаров*

5534. Некоторые экстремальные свойства преобразования Лапласа. Хилле (Some extremal properties of Laplace transforms. Hille Einar), Math. scand., 1953, **1**, № 2, 227—236 (англ.)

Даются ответы на некоторые вопросы, поставленные в книге Дёча (Doetsch G., Handbuch der Laplace — Transformation I, Basel, 1950) относительно преобразования Лапласа

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-zt} F(t)\, dt. \qquad (1)$$

Положим

$$\mu(x) = \overline{\lim_{|y|\to\infty}} \frac{\ln|f(x+iy)|}{\ln|y|}.$$

Величина $\mu(x)$, называемая порядком функции $f(z)$ на прямой $\mathrm{Re}(z)=x$, не превосходит 1 в полуплоскости сходимости интеграла (1) и не превосходит $k+1$ в полуплоскости, где интеграл (1) суммируем (C, k). Доказывается, что возможны следующие случаи: 1) интеграл сходится при $\mathrm{Re}(z)>0$ и $\mu(x)=1-x$, если $0<x<1$, и $\mu(x)=0$, если $x\geqslant 1$; 2) интеграл сходится при $\mathrm{Re}(\cdot)>0$ и $\mu(x)\equiv 1$ при $x>0$; 3) интеграл суммируем (C, k) при $x>0$ (k — целое) и $\mu(x)\equiv k+1$ при $x>0$; 4) функция $f(z)$ — целая, а интеграл суммируем (C, k) при любом $k>0$ только в полуплоскости $\mathrm{Re}(z)>0$. Кроме этого, показывается, что если $F(t)\geqslant 0$ и интеграл всюду расходится, то он не суммируем нигде методом (C, k). Случаи 2) и 3) были отмечены ранее (Jansson T., Arkiv math., astr., fysik, 1920, **15**, № 6). *А. Ф. Леонтьев*

5535. Об определении аналитических функций условиями, наложенными на их последовательные производные. Комб (Sur la détermination des fonctions analytiques par des conditions imposées à leurs dérivées successives. Combes Jean), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 23, 1482—1484 (франц.)

Автор ставит вопрос о том, в какой степени функция $f(z)$, регулярная в некоторой области D, определяется значениями $f^{(n)}(z_n)$ $(z_n \in D;$ $n=0, 1, 2, \ldots)$.

1. Пусть $\{D_n\}$ — возрастающая последовательность целых неотрицательных чисел; $D_1 = d_1 \geqslant 0$, $D_n - D_{n-1} = d_n$ $(n=2, 3, \ldots)$. Предположим, что $|z_n| \leqslant 1$ при $n \in \{D_n\}$ и что $z_n = 0$, $f(z_n) = 0$ при $n \notin \{D_n\}$.

Тогда, считая функцию $f(z) \equiv \Sigma a_n z^{D_n}/D_n!$ регулярной в точке $z=0$, можно утверждать, что ряд $\Sigma |a_n|/d_2!\ldots d_n!\,(\log 2)^n$ расходящийся.

Отсюда следует (если $f(\cdot)$ — не полином):

а) во всякой конечной области Δ целая функция порядка <1 (или порядка 1, типа 0) имеет бесконечное множество производных, не обращающихся в нуль;

б) то же справедливо относительно целых функций $f(z) = \Sigma A_n z^{D_n}$ порядка $<1/(1-k)$, где

$$k = \underline{\lim}\left\{\sum_{m=2}^{n} d_m \log d_m / D_n \log D_n\right\};$$

в) то же справедливо относительно лакунарных функций вида $f(z) = \Sigma A_n z^{D_n}$ при условии $d_n/d_{n-1}\to\infty$ во всякой области Δ, расположенной внутри круга сходимости (Δ в круге $|z|<r$, $r<R$, где R — радиус сходимости).

2. В случае, если выполнены неравенства $(d_n + d_{n+1})!\, d_n!\, d_{n+1}! \geqslant 4$ и ряд $\Sigma\,(2^n d_2! \ldots d_n! z^{D_n}/D_n!)$ сходится в круге радиуса, большего единицы, существуют тождественно не равные нулю функции $f(z) \equiv \Sigma a_n z^{D_n}/D_n!$, регулярные в круге $|z| \leqslant 1$, такие, что все производные $f^{(D_n)}(z)$ обращаются в нуль в точке $z = 1$.

3. Для того чтобы существовали функции $f(z)$, регулярные в круге $|z| \leqslant 1$, принимающие вместе со своими производными значения α_n в точке $z = 0$, кроме производных порядков D_n, каковые принимают значения β_n в точке $z = 1$, достаточно сходимости ряда $\Sigma\,|b_n|\, d_2! \ldots d_n!$ (попрежнему $d_n = D_n - D_{n-1}$).

Доказательства автор предполагает привести в другом месте. Предложение а) было высказано ранее референтом (Gontcharoff W., Ann. École Norm. 1930, 47, 35). *В. Л. Гончаров*

5536. Об ограниченных однолистных функциях. Хажинский (Sur les fonctions univalentes bornées. Charzyński Zygmunt), Rozprawy Matematyczne II, Warszawa, 1953, 57 (франц.)

Рассматривается семейство F_T регулярных и однолистных в единичном круге $|z| < 1$ функций

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{nf} z^n,\ |f(z)| < 1,\ f'(0) \geqslant T,\ 0 < T < 1$$

и некоторая действительная функция

$$H(X_2, \ldots, X_N, Y_2, \ldots, Y_N)$$

$2N-2$ действительных переменных, определенная в области изменения коэффициентов $X_{nf} + iY_{nf} = \dfrac{a_{nf}}{a_{1f}}$, $n = 2, \ldots, N$, $f(z) \subset F_T$ и имеющая в ней непрерывные производные первого порядка, не обращающиеся одновременно в нуль.

В первой части работы доказывается следующая теорема.

В семействе F_T существуют экстремальные функции $f^*(z)$, для которых функционал $H(X_{2f}, \ldots, X_{Nf}, Y_{2f}, \ldots, Y_{Nf})$ принимает наибольшее значение. Каждая из этих функций удовлетворяет уравнению

$$\left[\frac{f^{*\prime}(z)}{f^*(z)}\right]^2 \mathfrak{M}[f^*(z)] = \frac{1}{z^2}\,\mathfrak{N}(z),\ |z| < 1,$$

где

$$\mathfrak{M}(w) = \sum_{p=2}^{N}\left(\frac{\mathfrak{D}^*_{p-1}}{w^{p-1}} + \overline{\mathfrak{D}}^*_{p-1} w^{p-1}\right) - 2\mathfrak{P}^*,$$

$$\mathfrak{N}(z) = \sum_{p=1}^{N}\left(\frac{\mathfrak{C}^*_{p-1}}{z^{p-1}} + \overline{\mathfrak{C}^*_{p-1}}\, z^{p-1}\right) - 2\mathfrak{P}^*,$$

$$f^*(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* z^n,$$

$$\left[f^*(z)\right]^p = \sum a_n^{*(p)} z^n \quad (p = 2, 3, \ldots),$$

$$A_n^* = \frac{a_n^*}{a_1^*} \quad (n = 2, 3, \ldots),$$

$$A_n^* = X_n^* + iY_n^* \quad (n = 2, 3, \ldots),$$

$$H_n^* = H'_{X_n}(X_2^*, \ldots, X_N^*, Y_2^*, \ldots, Y_N^*) - iH'_{Y_n}(X_2^*, \ldots, X_N^*, Y_2^*, \ldots, Y_N^*) \quad (n = 2, \ldots, N),$$

$$\mathfrak{D}^*_{p-1} = 2\sum_{n=p}^{N} a_n^{*(p)} H_n^* \quad (p = 2, \ldots, N),$$

$$\mathfrak{C}_0^* = \sum_{n=2}^{N} (n-1)\, a_n^* H_n^*,$$

$$\mathfrak{C}^*_{p-1} = 2\sum_{n=p}^{N} (n-p+1)\, a^*_{n-p+1} H_n^* \quad (p = 2, \ldots, N),$$

$$\mathfrak{P}^* = \min_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} \operatorname{Re}\left\{\sum_{p=2}^{N} \mathfrak{D}^*_{p-1}\, e^{ix(p-1)}\right\}.$$

Функции $\mathfrak{M}(w)$ и $\mathfrak{N}(z)$ принимают соответственно на окружностях $|w| = 1$ и $|z| = 1$ только неотрицательные значения и каждая из них имеет там по крайней мере один двойной нуль. Наконец, $a_1^* = T$.

Доказательство этой теоремы существенным образом опирается на установленное автором в лемме 5 свойство аналитической продолжаемости экстремальной функции $f^*(z)$ через некоторую дугу C окружности $|z| = 1$, образом которой является также дуга D окружности $|w| = 1$. Эта лемма позволяет далее варьировать любую экстремальную функцию методом, ранее применявшимся М. А. Лаврентьевым, а также при помощи суперпозиции дробно-линейного преобразования и извлечения квадратного корня, применяющейся обычно при доказательстве теоремы Римана. Отсюда следует уравнение для $|f^{*\prime}(z)|$ на дуге C, что в силу аналитичности $f^*(z)$ и соотношения $\dfrac{zf^{*\prime}(z)}{f^*(z)} = |f^{*\prime}(z)|$, $z \in C$, доказывает существенную часть теоремы.

Во второй части работы автор рассматривает те же функции $f(z)$, подчиненные дополнительному условию отображать круг $|z| < 1$ на области G, принадлежащие кругу $|w| < 1$ и имеющие меру этого круга, например, на круг с разрезами. Для них он доказывает две теоремы.

1) Коэффициенты функции

$$[f(z)]^p = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(p)} z^p \quad (p = 1, 2, \ldots)$$

обладают свойством ортогональности

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\overline{n}}{k}}\, a_n^{(k)} \cdot \sqrt{\frac{\overline{n}}{k}}\, \overline{a_n^{(l)}} = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ 1, & k = l. \end{cases}$$

Рассматривая семейство H голоморфных функций $h(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$, $|z| < 1$, подчиненных

условию $\sum_{n=1}^{\infty} |\sqrt{n}\, b_n|^2 < \infty$, и вводя для них норму $|h(z)| = \sum_{n=1}^{\infty} |\sqrt{n}\, b_n|^2$, автор замечает, что семейство функций H является пространством H типа (B).

2) Для всякого линейного функционала $L[h(z)]$, определенного в пространстве H, и для всякой функции $f(z)$, удовлетворяющей условиям теоремы 1, имеет место следующее неравенство:

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{|L\{[f(z)]^p\}|}{p} \leqslant \sum_{p=1}^{\infty} \frac{|L\{z^p\}|}{p}.$$

Доказательство теоремы 1 основано на подсчете меры образов круга $|\zeta| < 1$ и области G при однолистном отображении их соответственно полиномом $W(\zeta) = \zeta + \lambda_2\zeta^2 + \ldots + \lambda_N\zeta^N$ с произвольно малыми коэффициентами и функцией $\Psi(z) = W[f(z)]$, $|z| < 1$. Сравнение этих мер дает равенство

$$\sum_{h=1}^{N} \pi h \lambda_h \overline{\lambda}_h = \sum_{k,l=1}^{N} \pi \lambda_k \overline{\lambda}_l \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, a_n^{(k)} \sqrt{n}\, \overline{a}_n^{(l)} \right),$$

откуда и следует утверждение теоремы 1.

Теорема 2 вытекает из представимости каждого линейного функционала в пространстве H типа (B) в форме

$$L[h(z)] = \sum_{n=1}^{\infty} X_n b_n,$$

где $\{X_n\}$ — некоторая последовательность комплексных чисел, $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{X_n}{\sqrt{n}} \right|^2 < \infty$, и ортогональности векторов $\left\{ \sqrt{\frac{n}{p}}\, a_n^{(p)} \right\}$.

И. Е. Базилевич

5537. Замечание о форме линий уровня функции Грина. У о л ш (Note on the shape of level curves of Green's function. W a l s h J. L.), Amer. Math. Monthly, 1953, 60, № 10, 671—674 (англ.)

Пусть ψ — угол между радиусом-вектором, проведенным из начала координат в точку P гладкой кривой C, и касательной к кривой в точке P. Близость кривой C к окружности характеризуется величиной $\left| \psi - \frac{\pi}{2} \right|$.

Т е о р е м а 1. Пусть R — конечная односвязная область, содержащая точку $z = 0$, и C_r $(0 < r \leqslant 1)$ — линии уровня функции Грина с полюсом в $z = 0$

а) Если граница C_1 области R есть гладкая кривая, для которой угол ψ удовлетворяет неравенству $\psi_0 \leqslant \psi \leqslant \psi_1$, то тому же неравенству удовлетворяет угол ψ для любой C_r; если R не есть круг, то из неравенства $r_1 < r_2 \leqslant 1$ следуют неравенства

$$\max_{P \in C_{r_1}} \{\psi\} < \max_{P \in C_{r_2}} \{\psi\} \text{ и } \min_{P \in C_{r_1}} \{\psi\} > \min_{P \in C_{r_2}} \{\psi\}.$$

б) Если R звездообразна, то для C_r

$$\left| \psi - \frac{\pi}{2} \right| \leqslant \operatorname{arc\,tg} \frac{2r}{1 - r^2}.$$

в) Если R — произвольная область, то для C_r

$$\left| \psi - \frac{\pi}{2} \right| \leqslant \ln \frac{1 + r}{1 - r}.$$

Т е о р е м а 2. Пусть R — бесконечная область и функция Грина имеет полюс в бесконечности. Если круг с центром в точке $z = 0$ и радиуса ρ_0 содержит границу области, то для всякой линии уровня, внешней к концентрическому кругу радиуса $\rho > \rho_0$,

$$\left| \psi - \frac{\pi}{2} \right| \leqslant \arcsin \frac{\rho_0}{\rho}.$$

Т е о р е м а 3. Если граница области R лежит вне круга радиуса ρ_0 с центром в точке $z = 0$, то для всякой линии уровня функции Грина с полюсом в $z = 0$, лежащей внутри концентрического круга радиуса $\rho < \rho_0$, справедливо неравенство

$$\left| \psi - \frac{\pi}{2} \right| \leqslant \arcsin \frac{\rho}{\rho_0}.$$

П. К. Суетин

5538. Замечание о форме линий уровня функции Грина. У о л ш (Note on the shape of level curves of Green's function. W a l s h J. L.), Duke Math. J., 1953, 20, № 4, 611—615 (англ.)

Рассматривается поведение линий уровня функции Грина в случае линейного отображения T области внутрь самой себя, где отображения T имеют вид

$$\frac{W}{W - \alpha} = A \frac{w}{w - \alpha} \quad (\alpha \neq 0, A \neq 1, 0 < |A| \leqslant 1) \quad (1)$$

или

$$\frac{1}{W} = \frac{1}{w} + \beta \quad (\beta \neq 0). \quad (2)$$

Доказываются две теоремы. Теорема 1 есть не что иное, как принцип Линделёфа для отображений вида (1).

Т е о р е м а 2. Пусть односвязная область R плоскости w отображается на круг $|z| < 1$ функцией $w = f(z)$, $(z = F(w))$. Пусть граничные точки $w = 0$ и $z = 1$ соответствуют друг другу в том смысле, что из $w_n \to 0$ следует $F(w_n) \to 1$ и из $z_n \to 1$ следует $f(z_n) \to 0$. Пусть C_a орицикл $|z - a| = 1 - a$, $0 < a < 1$, и Γ_a — подобласть R, ограниченная образом C_a в плоскости w. Тогда, если преобразование T вида (1) или (2) переводит R внутрь самой себя, то это же верно и для подобластей Γ_a.

Доказательство теоремы 2 опирается на теорему Жюлиа. Кроме того, автор показывает, что в классе линейных отображений теорема 1 верна только для преобразований вида (1) и теорема 2 только для преобразований (1) и (2). *П. П. Белинский*

5539. Определение формы биплана по заданному распределению скорости по поверхности профи-

лей, его составляющих. **Насыров Р. М.**, Уч. зап. Казанск. ун-та, 1953, 113, № 10, 31—41

Дается решение обратной задачи аэродинамики для случая двусвязной области. По заданному распределению скоростей по системе двух неизвестных профилей в плоскости z с заданными длинами и по известному выносу одного разреза в плоскости комплексного потенциала $w = w(z)$ относительно другого находится форма профилей и их взаимное расположение с точностью до переноса. Функция $W = \varphi(u)$, отображающая область потока в плоскости w на внешность разрезов на единичной окружности в плоскости u, находится как комплексный потенциал потока, обтекающего указанные разрезы (Чаплыгин С. А., Собрание сочинений, ГИТТЛ, М. — Л., 1948, 431—472). Для определения функции $\ln\left|\frac{dz}{du}\right|$ получается задача Дирихле, решение которой дается в виде квадратур. Затем при помощи интеграла

$$z = \int e^{\chi(u)}\, du,\ \chi(u) = \ln \frac{dz}{du},$$

восстанавливается искомая форма профилей, образующих биплан, и из условия однозначности функции $z = z(u)$ получаются условия разрешимости задачи. *Г. Н. Положий*

5540. **К расчету обтекания решетки при большом расстоянии между крыльями. Бетц** (Zur Berechnung von Gitterströmungen bei einigermaßen großem Schuafelabstand. Betz A.), Z. angew. Math. und Mech., 1953, **33**, № 4, 113—116 (нем.; резюме англ., франц., русск.)

Исследуется обтекание потоком идеальной несжимаемой жидкости решетки с большим расстоянием между крыльями. При изучении влияния на обтекание крыла соседних крыльев последние заменяются изолированными вихрями. Комплексный потенциал $\Phi' + i\Psi'$ цепочки вихрей (за вычетом вихря, помещенного в начале координат) представляется рядом

$$-i(\Phi' + i\Psi') = -\frac{\Gamma}{2\pi}\left[\frac{1}{6}\left(\frac{z\pi}{t}\right)^2 - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{180}\left(\frac{z\pi}{t}\right)^4 + \frac{1}{2835}\left(\frac{z\pi}{t}\right)^6 + \ldots\right],$$

где t — расстояние между вихрями, Γ — циркуляция. Заменяя крыло системой вихрей, автор дает формулы для расчета потенциала скоростей в любой точке крыла, рекомендуя удерживать в разложении $\Phi' + i\Psi'$ только первый член. *М. И. Гуревич*

5541. **Аналитичность и принцип максимума модуля. Рудин** (Analyticity, and the maximum modulus principle. Rudin Walter), Duke Math. J., 1953, **20**, № 3, 449—457 (англ.)

Пусть K — компакт в плоскости z и B — его граница. Рассмотрим алгебру A функций $f(z)$, заданных на K (т. е. такое множество функций, что если $f \in A$ и $g \in A$, то $f + g \in A$ и $cf \in A$, c — произвольное комплексное число).

Алгебру A, состоящую из непрерывных на K функций, назовем алгеброй с максимумом модуля, если для любой $f(z) \in A$ найдется точка $z_0 \in B$ такая, что $|f(z)| \leqslant |f(z_0)|$, $z \in K$. Алгебру A назовем алгеброй с локальным максимумом модуля в области D, если для каждого $z \in D$ существует последовательность жордановых областей U_n, $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = z$, таких, что A является алгеброй максимального модуля на любой из $\overline{U}_n$.

Основные результаты работы:

Теорема 1. Пусть A — алгебра с максимумом модуля над D, где D — жорданова область (т. е. внутренняя область простой, замкнутой, жордановой кривой). Если A содержит унивалентную функцию $\psi(z)$ (не обязательно аналитическую), то любая $f \in A$ есть аналитическая функция от ψ. Если, сверх того, A содержит аналитическую в D функцию $\varphi(z) \not\equiv \text{const}$, то каждая функция $f \in A$ аналитична в D.

Более подробно первый результат теоремы означает, что для каждой $f(z) \in A$ существует функция f^*, непрерывная на $\psi(\overline{D})$ и аналитическая на $\psi(D)$, причем

$$f(z) = f^*(\psi(z)).$$

Теорема 2. Если A — алгебра с локальным максимумом модуля в D — содержит аналитическую в D функцию $\varphi \not\equiv \text{const}$, то каждая функция $f \in A$ аналитична в D.

Теорема 4. Пусть A — алгебра с максимумом модуля в $\overline{D}$, где D — область, ограниченная конечным числом простых замкнутых контуров. Если A содержит все функции, аналитические и однозначные в D, то любая $f \in A$ аналитична в D. *С. Я. Хавинсон*

5542. **Особенности интегралов Лапласа в абсциссе суммируемости. Майер-Калькшмидт** (Singularitäten von Laplace-Integralen an der Summierbarkeitsabszisse. Mayer-Kalkschmidt Jörg), Arch. Math., 1953, **4**, № 5—6, 441—445 (нем.)

Доказывается следующая теорема, аналогичная теореме Ландау об особенности интеграла Лапласа в абсциссе сходимости: если интеграл Лапласа

$$\int_0^{\infty} e^{-st} a(t)\, dt$$

$(C, 1)$-суммируем с абсциссой суммируемости $\beta_1 > -\infty$ и $f(s)$ — его аналитическое продолжение, причем правая производная $f(s)$ в точке β_1 равна нулю и

$$\sigma(s, t) = \frac{1}{t}\int_0^t e^{-s\tau}(t - \tau)\, a(\tau)\, d\tau$$

при $s = \beta_1$ является возрастающей функцией t для $t \geqslant T \geqslant 0$, то $s = \beta_1$ — особая точка функции $f(s)$. Соответствующая теорема формулируется и для (C, k)-суммируемых интегралов Лапласа при целом $k > 1$. *В. И. Левин*

5543. **О некоторых интегралах Лапласа. Делаж** (Sur certaines intégrales de Laplace. Delange Hubert), Bull. sci. math., 1953, sept. oct. **77**, 141—168 (франц.)

Приводятся подробные доказательства теорем, опубликованных автором ранее (C. r. Acad. sci., 1951, 233, 1413—1414), относительно особых точек функции $f(s)$, определенной интегралом $f(s) = \int_0^\infty e^{-st}d\alpha(t)$.

Предполагается, что комплексная функция $\alpha(t)$ определена при $t \geqslant 0$ и имеет ограниченную вариацию в любом конечном интервале, интеграл имеет конечную абсциссу сходимости σ_c.

Теорема 1. Предположим, что существуют действительная функция $\psi(t)$, непрерывная при $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, и число φ, $0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2}$, такие, что 1) каковы бы ни были t' и t'', $t_0 \leqslant t' < t''$, аргумент интеграла $\int_{t'}^{t''} e^{-i\psi(u)}d\alpha(u)$ не превосходит по абсолютному значению φ, 2) при любом $h > 0$ разность $\psi(t+h) - \psi(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Тогда точка $s = \sigma_c$ является особой для $f(s)$.

Теорема 2. Если в предыдущей теореме вместо второго условия выполняется условие: при любых t' и t'', $t_0 \leqslant t' < t''$,

$$|\psi(t'') - \psi(t')| \leqslant k|t' - t''|, \qquad (1)$$

то тогда функция $f(s)$ имеет по крайней мере одну особую точку на отрезке $[\sigma_c - ikC(\varphi), \sigma_c + ikC(\varphi)]$, где $C(\varphi)$ зависит только от φ.

Путем рассмотрения примера легко показывается, что $C(\varphi) \geqslant \frac{\pi}{\pi - 2\varphi}$, откуда, в частности, $C(0) \geqslant 1$. Более сложно доказывается затем, что $C(0) = 1$.

Теорема 3. Пусть $\psi(t)$ — действительная функция, непрерывная при $t \geqslant 0$, $\nu(t)$ — неубывающая действительная функция при $t \geqslant 0$.

Если выполняется условие (1), то функция

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{i\psi(t)}d\nu(t)$$

(интеграл имеет конечную абсциссу сходимости σ_c) имеет по крайней мере одну особую точку на отрезке $[\sigma_c - ik,\ \sigma_c + ik]$. В качестве следствия из теоремы 3 получается теорема Пойа о том, что если в ряде Дирихле $\sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s}$ с конечной абсциссой сходимости σ_c $\varliminf_{n\to\infty}(\lambda_{n+1} - \lambda_n) = l > 0$, то на отрезке длины $\frac{2\pi}{l}$ прямой сходимости имеется хоть одна особая точка суммы ряда.

Теорема 4. Пусть в ряде Тейлора $F(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ с конечным радиусом сходимости R коэффициенты $a_n = |a_n|e^{i\varphi_n}$ таковы, что $|\varphi_{n+1} - \varphi_n| \leqslant \pi$ и $\varlimsup_{n\to\infty}|\varphi_{n+1} - \varphi_n| = \gamma < \pi$. Тогда $F(z)$ имеет по крайней мере одну особую точку вида $z = Re^{i\theta}$, где $-\gamma \leqslant \theta \leqslant \gamma$.

Теоремы 3 и 4 следуют из теоремы 2.

А. Ф. Леонтьев

5544. Адамаровское произведение двух изолированных существенно особых точек конечного показательного порядка. Вильсон (On the Hadamard product of two isolated essential points of finite exponential order. Wislon R.), J. London Math. Soc., 1953, 28, ч. 4, № 12, 490—494 (англ.)

Известно, что если $f[1/(1-z)] = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ и $g[1/(1-z)] = \sum_{n=0}^\infty b_n z^n$ суть целые функции от $1/(1-z)$, то и ряд $\sum_{n=0}^\infty a_n b_n z^n$ представляет целую функцию $h[1/(1-z)]$ от $1/(1-z)$. Основываясь на своих предыдущих результатах (Macintyre A. J., Wilson R., J. London Math. Soc., 1947, 22, 298—304; РЖМат, 1953, 695), автор доказывает теорему:

Если порядки роста $f(z)$ и $g(z)$ различны, то порядок роста $h(z)$ совпадает с небольшим из порядков функций $f(z)$ и $g(z)$ и индикатриса роста равна индикатрисе роста «старшей» функции. Если же $f(z)$ и $g(z)$ одного порядка ρ, то и $h(z)$ порядка ρ и каждое направление $\arg z = \theta$ наибольшего роста функции $h(z)$ удовлетворяет соотношению

$$K^{\frac{1}{\rho+1}}e^{\frac{i\rho\theta}{\rho+1}} = K_1^{\frac{1}{\rho+1}}e^{\frac{i\rho\theta_1}{\rho+1}} + K_2^{\frac{1}{\rho+1}}e^{\frac{i\rho\theta_2}{\rho+1}},$$

в котором K, K_1, K_2 — типы функций h, f и g, а $\arg z = \theta_1$ и $\arg z = \theta_2$ — некоторые направления наибольшего роста функций $f(z)$ и $g(z)$. *Б. Я. Левин*

5545. О целых функциях бесконечного порядка. Шах, Кханна (On entire functions of infinite order. Shah S. M., Khanna Girja), Math. Student, 1953, 21, № 1—2, 47—48 (англ.)

Пусть $M(r, F)$ — максимум модуля целой функции $F(z) = \Sigma a_n z^n$, $\mu(r, F)$ — максимальный член ряда, $\nu(r, F)$ — центральный индекс.

Авторы доказывают, что для целых функций бесконечного порядка

$$\varliminf \frac{\ln rM(r, f')}{\nu(r, f)} = 0, \quad \varliminf \frac{\ln M(r, f)}{\nu(r, f')} = 0.$$

М. А. Евграфов

5546. О теореме Данжуа — Карлемана — Альфорса. Суньер-и-Балагер (Sur le théorème de Denjoy-Carleman-Ahlfors. Sunyer i.

Balaguer Ferran), C. r. Acad. sci., 1953, 237, № 11, 548—550 (франц.)

Даются дополнения к известной теореме Данжуа — Карлемана — Альфорса об асимптотических значениях целой функции, причем учитывается скорость приближения целой функции к ее асимптотическому значению.

Пусть $f(z)$ — целая функция порядка ρ и уточненного порядка $\rho(r)$ ($\lim\limits_{r\to\infty}\rho(r)=\rho$), a — ее асимптотическое значение и Δ — совокупность всех непрерывных кривых $z=\varphi(t)$ $(0<t<\infty, \lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t)=\infty$, для которых $f[\varphi(t)]\to a$. Тип b асимптотического значения a определяется равенством

$$b=\sup_{\varphi\in\Delta}\left\{\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln\dfrac{1}{|f[\varphi(t)]-a|}}{U(|\varphi(t)|)}\right\}\quad (U(r)=r^{(\rho r)}).$$

Определяется индекс вращения

$$\lambda=\overline{\lim_{t\to\infty}}\,|\arg\varphi(t)|/\ln|\varphi(t)|$$

(и $\mu=\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\ln|\arg\varphi(t)|/\ln|\varphi(t)|$). Автор замечает, что λ (и μ) одно и то же для всех кривых $\varphi(t)$, по которым функция стремится к асимптотическому значению. Автором получены следующие результаты:

Теорема 1. Если $f(z)$ имеет асимптотические значения $a_1, a_2, \ldots, a_n$ типов $b_1, b_2, \ldots, b_n$, то

$$n(1+\lambda^2)+2\sum_{k=1}^{n}\psi(b_k)\leqslant 2\rho,$$

где $\psi(b)>0$ при $b>0$ и $b^2=O[\psi(b)]$ при $b\to 0$ (автор высказывает предположение, что $b=O(\psi(b))$, $b\to 0$).

Теорема 2. В условиях теоремы 1 верно неравенство

$$n(1+\mu^2)+2\frac{\rho_1}{\rho}\sum_{k=1}^{n}\psi(b_k)\leqslant 2\rho_1,$$

где $\rho_1=\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\dfrac{\ln\ln M(r)}{\ln r}$.

Теорема 3. Все асимптотические значения положительного типа для $f(z)$ суть значения с положительным дефектом в смысле Р. Неванлинна.

Доказательства не приведены. *Б. Я. Левин*

5547. Некоторые свойства больших по абсолютной величине корней трансцендентных уравнений. **Лабазин В. Г.**, Вестн. Ленингр. ун-та, 1953, № 11, 13—23

Для корней $z_k=x_k\pm iy_k$, $k=1, 2, \ldots$, уравнения

$$(a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n)-(b_0z^m+b_1z^{m-1}+\ldots+b_m)e^{-z}=0,$$

где $p=n-m\geqslant 0$, $a_0b_0\neq 0$ и коэффициенты a_j, b_j — вещественные числа, выводятся асимптотические выражения

$$y_k=2k\pi-p\frac{\pi}{2}+\beta_k,\quad x_k=-py_k+\ln\left|\frac{b_0}{a_0}\right|+\alpha_k,$$

где $\alpha_k\to 0$ и $\beta_k\to 0$ при $k\to\infty$ (в случае $p=0$ эти формулы были даны ранее А. А. Соколовым, Инж. сб., 1946, 2, № 2, 3—26). Далее устанавливается, что при $p=0$ и $a_0=b_0$

$$\lim_{k\to\infty}x_ky_k^2=-\frac{a_1^2-b_1^2+2(b_2-a_2)a_0}{2a_0^2}.$$

При $p=0$ и произвольных a_0, b_0 доказывается, что $\alpha_k=O\left(\frac{1}{k^2}\right)$, $\alpha_{k+1}-\alpha_k=O\left(\frac{1}{k^3}\right)$ и для $k\geqslant k_1$ $\operatorname{sign}(\alpha_{k+1}-\alpha_k)=\operatorname{sign}m_1$, где $m_1=a_1^2b_0^2-a_0^2b_1^2+2a_0b_0(a_0b_2-a_2b_0)+2a_0b_0(a_1b_0-a_0b_1)\ln\left|\frac{b_0}{a_0}\right|$, а также $\beta_k=O\left(\frac{1}{k}\right)$, $\beta_{k+1}-\beta_k=O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ и для $k\geqslant k_2$ $\operatorname{sign}(\beta_{k+1}-\beta_k)=\operatorname{sign}m_2$ где $m_2=a_1b_0-a_0b_1$. Если $m_1=0$, то порядки малости α_k и $\alpha_{k+1}-\alpha_k$ повышаются, то же самое имеет место для β_k и $\beta_{k+1}-\beta_k$ при $m_2=0$.

Аналогичные рассмотрения проводятся для корней уравнения

$$P(z)-Q(z)e^{-z}+R(z)e^{-z/2}=0,$$

где $P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$, $Q(z)=b_0z^n+b_1z^{n-1}+\ldots+b_n$ и $R(z)=c_0z^{n-1}+\ldots+c_{n-1}$.

Полученные результаты в основном совпадают с приведенными выше в случае $p=0$, т. е. наличие в уравнении слагаемого с $R(z)$ более низкой степени, чем равные степени $P(z)$ и $Q(z)$, не влияет на асимптотику корней.

Неверно набрана формула (5); на стр. 19, в строке 6 вместо (18) должно быть (17). *В. И. Левин*

5548. Замечание о применении гиперболического мероопределения в учении о распределении значений мероморфных функций. **Виртанен** (Eine Bemerkung über die Anwendung hyperbolischer Massbestimmungen in der Wertverteilungslehre der meromorphen Funktionen. Virtanen K. I.), Math. scand., 1953, 1, № 1, 153—158 (нем.)

Вначале приведены краткие замечания об известных методах применения различных распределений массы при рассмотрении вопросов, связанных с доказательствами первой и второй основных теорем теории мероморфных функций (см., например, Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, ГТТИ, М.—Л., 1941, гл. VI, IX).

Далее, используя метод, примыкающий к методу, использованному Неванлинна для доказательства второй основной теоремы (см. там же, гл. IX, § 4), автор приводит доказательство неравенства

$$\lim_{r\to R}\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{q}\bar N(r,a_\nu)+\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=r}\log\rho(z)\,d\varphi}{T(r)}\geqslant q-2, \quad (1)$$

имеющего место для любой мероморфной в круге $|z|<R$ функции $w(z)$ с неограниченной характеристикой. Здесь $q\geqslant 3$, а $\bar N(r,\alpha_\nu)$ отличается от обыч-

но рассматриваемой функции $N(r, a_\nu)$ только тем, что при составлении $N(r, a_\nu)$ учитываются кратности a_ν точек $w(z)$, а составление $\overline{N}(r, a_\nu)$ ведется без учета кратностей a_ν точек $w(z)$. Чтобы определить $\rho(z)$, удаляют из круга $|z|<R$ все те точки $z_\varkappa^{(1)}, \ldots, z_\varkappa^{(q)}$, в которых $w(z)$ принимает значения $a_1, \ldots, a_q$, и в получившейся области вводят неевклидово мероопределение Лобачевского — Пуанкаре. Тогда, если через $d\sigma(z)$ обозначить элемент площади для введенной метрики, то $\rho(z)$ определится равенством $d\sigma(z) = \rho^2(z)\,dx\,dy$ $(z = x + iy)$.

В заключение указывается, что если выполнить с помощью теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом оценку интеграла $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \rho(z)\,d\varphi$, то получится результат, соответствующий в существенном второй основной теореме. Приведено также непосредственное приложение неравенства (1) для оценки роста $T(r)$ в случае, когда сумма $\Sigma N(r, a_\nu)$ является ограниченной. *Г. Ц. Тумаркин*

5549. Модулярное преобразование некоторых рядов. Розен (Modular transformation of certain series. Rosen S.), Duke Math. J., 1953, **20**, № 4, 593—599 (англ.)

Следуя Радемахеру (Rademacher H., Amer. J. Math., 1939, **61**, 237—248), который дал непосредственное доказательство того, что ряд, представляющий известную модулярную функцию $I(\tau)$ (см., например, Ахиезер Н. И., Элементы теории эллиптических функций, Гостехиздат, 1948), инвариантен относительно группы дробно линейных преобразований вида

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \qquad (1)$$

где a, b, c и d — целые числа и $ad - bc = 1$, автор устанавливает модулярность функции

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + x^n) = e^{-\frac{\pi i \tau}{12}}\,\frac{\eta(2\tau)}{\eta(\tau)} \qquad (2)$$

$$\left(x = e^{2\pi i\tau},\ \eta(\tau) = e^{\frac{\pi i\tau}{12}}\prod_{n=1}^{\infty}(1 - e^{2\pi i n\tau})\right)$$

относительно подгруппы группы преобразований (1), характеризующейся четностью числа c. А именно, пусть $\overline{h}$ есть решение сравнения $h\overline{h} + 1 \equiv 0 \pmod{k}$ для целых и взаимно простых чисел h и k, а также

$$\Omega_{h,k} = \begin{cases} \left(\frac{2}{h}\right)\exp \pi i\left\{\frac{kh}{8} - \frac{1}{12}(2h - \overline{h} + h^2\overline{h})\times\right. \\ \qquad \left.\times\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{k}\right)\right\}, \text{ если } k \text{ четно} \\ \left(\frac{2}{k}\right)\exp \pi i\left\{\frac{1}{12}\left(k - \frac{1}{k}\right)\left(2h + \frac{\overline{h}}{2} + h^2\overline{h}\right)\right\}, \\ \qquad \text{если } k \text{ нечетно и } \overline{h} \text{ четно} \end{cases}$$

($\left(\frac{2}{h}\right)$ и $\left(\frac{2}{k}\right)$ — символы Лежандра).

Тогда, если τ' и τ связаны соотношением (1), в котором c — четное число, то

$$f(x) = \exp\frac{\pi i}{12}\left(\tau' - \tau - \frac{a+d}{c}\right)\Omega_{-d,\,c} f(x'), \qquad (3)$$

где $x' = e^{2\pi i\tau'}$.

Доказательство (3) опирается на полученное Хуа Ло-гэном (Loo-keng Hua, Trans. Amer. Math. Soc., 1942, **51**, 194—201) разложение функции (2) в степенной ряд. *А. Ф. Тиман*

5550. Об итерации аналитических функций. Рёдстрём (On the iteration of analytic functions. Rådström Hans), Math. scand., 1953, **1**, № 1, 85—92 (англ.)

Рассматривается задача: выделить наиболее широкий класс аналитических функций, на который распространялись бы главные результаты теории итераций, развитой Фату и Жюлиа для рациональных и целых функций. Пусть $f(x)$ — функция мероморфная в области D комплексной сферы S; в дальнейшем предполагается, что если $S - D$ содержит изолированные точки, то эти точки будут для $f(x)$ существенными особенностями. Определим $f^n(x)$ следующим образом:

$$f^0(x) = x, \quad f^{n+1}(x) = f[f^n(x)].$$

Через D_ω обозначим множество всех тех x, для которых $f^n(x) \in D$ для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$. Автор прежде всего показывает, что возможны только следующие 4 случая: 1) $S = D_\omega$, 2) $S - D_\omega$ содержит только одну точку, 3) $S - D_\omega$ содержит только две различных точки a и b, 4) $S - D_\omega$ не содержит изолированных точек. В случае 1) f — рациональная функция, в случае 2) f — либо целая функция, либо получается из целой преобразованием Мёбиуса (т. е. преобразованием, осуществляемым при помощи дробно-линейной функции). Эти случаи были рассмотрены в работах Фату и Жюлиа. В реферируемой работе изучаются случаи 3) и 4).

Так устанавливается вид функций f, для которых имеет место случай 3). Показывается, что тогда f получается при помощи преобразования Мёбиуса функций, представимых в виде: либо $x^{-n}e^{F(x)}$, либо $x^n e^{F(x)+G(1/x)}$, где n — целое число, причем в первом случае $n > 0$, а F и G — целые функции, не равные тождественно постоянному. Далее автор доказывает, что в случае 3) D_ω содержит бесконечное множество точек, в которых последовательность $\{f^n\}$ не будет нормальной. В случае же 4) доказывается, что последовательность $\{f^n\}$ нормальна в D_ω.

В работе также показывается, что в случае 3) для множества иррегулярных точек F, около которых последовательность $\{f^n\}$ не будет нормальной, остаются справедливыми основные результаты, установленные Фату и Жюлиа для множества иррегулярных точек последовательности итераций рациональных и целых функций. Доказано, например, что около каждой точки из F имеется бесконечное множество точек, предшествующих всякой точке c, не равной a или b, что каждая точка F является предельной точкой для неподвижных точек и что множество $F \cup \{a, b\}$ есть совершенное.

Г. Ц. Тумаркин

5551. Об одном свойстве ограниченных на данной кривой последовательностей однородных полиномов от двух комплексных переменных. Лостер (Une propriété des suites de polynômes homogènes de deux varialbles complexes bornées sur une courbe. Loster C.) Roczn. Polskiego towarz. mat., (Ann. Soc. polon. math.), 1952, 25, 210—217 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (франц.)

Пусть «раздвиг» (écart) (Leja F., Bull. Acad. polon., 1933, сер. A, 453—461) всякой частной дуги кривой

$$x = x(t), \quad y = y(t), \qquad (C)$$

где $x(t)$ и $y(t)$ — непрерывные комплексные функции переменного t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, положителен.

С другой стороны, предположим, что последовательность полиномов

$$P_n(x, y) = a_{n,0}x^n + a_{n-1,1}x^{n-1}y + \ldots + a_{0,n}y^n$$

(коэффициенты $a_{i,k}$ комплексные) ограничена в каждой точке кривой C (отличной от начала $x = 0$, $y = 0$).

В таком случае со всяким ε (>0) и со всякой точкой p_0 кривой C может быть сопоставлена окрестность

$$V = V(\varepsilon, p_0),$$

в которой

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|P_n(x, y)|} < 1 + \varepsilon.$$

Автор высказывает предположение, что теорема может быть обобщена на случай какого угодно рода континуума C, но отмечает, что условие, касающееся необращения в нуль «раздвига», не может быть снято.

Аналогичная теорема, относящаяся к последовательности полиномов от одного комплексного переменного (также и формулировка настоящей теоремы), принадлежит Лея (Leja F., Math. Ann., 1933, 108, 517—524). *В. Л. Гончаров*

5552. О вырожденных мероморфных отображениях. II. Тимм (Über ausgeartete meromorphe Abbildungen. II. Thimm Walter), Math. Ann., 1953, 125, 264—283 (нем.)

Реферируемая статья является продолжением ранее опубликованной статьи автора (Thimm W., Math. Ann., 1952, 125, 145—164).

Пусть R_n — пространство n комплексных координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Совокупность $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ обозначается $(x)_n$; O — начало координат R_n; $(y)_n = A(x)_n$ — невырожденное линейное преобразование координат пространства R_n. Точка P пространства R_n имеет (y) — координаты: $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Наряду с пространством R_n рассматривается пространство параметров T, точка которого обозначается через t. Если t система k комплексных параметров и необходимо указать размерность, то применяется символ $(t)_k$. Символ $\{A, B\}$ обозначает топологическое произведение двух множеств A и B. Говорят, что **неприводимое в точке** $\{O, t_0\}$ аналитическое многообразие $M^{(s)}(t)$, допускающее каноническое представление

$$\begin{gathered}(y)_n = A(x)_n,\\ H(y_{s+1}/(y)_s, t) = 0,\\ y_{s+i} = \frac{G_i(y_{s+1}/(y)_s, t)}{H'(y_{s+1}/(y)_s, t)},\end{gathered} \qquad (1)$$

$$i = 2, 3, \ldots, n-s, \quad H' = \frac{\partial H}{\partial y_{s+1}},$$

«параметрически» зависит от t. Здесь: H — неприводимый в точке $\{(y)_s = (O)_s, t_0\}$ полином от y_{s+1}, коэффициенты которого в этой точке аналитические и обращаются все в ней в нуль за исключением старшего, который равен единице; G_i — полином от y_{s+1}, коэффициенты которого аналитические функции в точке $\{(y)_s = (O)_s, t_0\}$ и обращаются в нуль в тех точках, в которых одновременно обращаются в нуль H и H'. y_{s+i} — непрерывны в этих точках. Число s называется размерностью $M^{(s)}(t)$. Точка $\{(y')_s, t'\}$ называется регулярной точкой многообразия $M^{(s)}(t)$, если дискриминант H не обращается в ней в нуль. Если функции $F_j((x)_n, t), j = 1, 2, \ldots, m$, аналитические в области $\{U, T\}$, где U — окрестность точки O, T — открытая область пространства параметров, то для любой точки $t_0 \in T$ существует окрестность U_0 точки O, $U_0 \subset U$ и окрестность T_0 точки t_0 такие, что общие решения уравнений

$$F_j((x)_n, t) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

в области $\{U_0, T_0\}$ принадлежат конечному числу неприводимых в точке $\{O, t_0\}$ аналитических многообразий, которые параметрически зависят от t и имеют каноническое представление (1).

Пусть Δ_m — m-мерное неприводимое в точке O аналитическое многообразие пространства R_n (его каноническое представление получаем из (1), положив $k = 0, s = m$). Если

$$t = \Phi(x)_n = \frac{p(x)_n}{q(x)_n}$$

— мероморфная функция в точке O (p и q — аналитические в O), то существуют три возможности поведения t на Δ_m: 1) значения t удовлетворяют на Δ_m алгебраическому уравнению, 2) если $q \equiv 0$, а $p \not\equiv 0$ на Δ_m, то полагают $t \equiv \infty$ на Δ_m, 3) если $p \equiv 0$, $q \equiv 0$ на Δ_m, то функция $t = \Phi(x)_n$ называется «вполне неопределенной на Δ_m».

Пусть дано отображение A_k многообразия Δ_m, осуществляемое при помощи k функций

$$t_i = \frac{p_i(x)_n}{q_i(x)_n}, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \qquad (2)$$

$$p_i(0) = q_i(0) = 0,$$

мероморфных в точке O. $q_i(x)_n, i = 1, 2, \ldots, k$, не обращаются в нуль тождественно на Δ_m. Используя представление Δ_m в окрестности его регуляр-

ной точки с помощью аналитических функций $x_\nu = \psi_\nu(y)_m$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, автор называет рангом мероморфного отображения A_k на Δ_m ранг матрицы

$$\left(\frac{\partial t_\lambda}{\partial y_\mu}\right), \quad \lambda = 1, 2, \ldots, k, \quad \mu = 1, 2, \ldots, m.$$

Если ранг меньше m, то отображение A_k называется вырожденным.

Исследуя вырожденное мероморфное отображение A_k, автор устанавливает, что если k функционально независимых мероморфных функций $t_1, t_2, \ldots, t_k$ удовлетворяют некоторым предположениям, то каждая мероморфная функция, зависящая от них функционально, будет зависеть от них алгебраически. Это предложение является основным результатом работы, сформулированным автором в следующей теореме:

Пусть A_k, определенное посредством (2), мероморфное отображение ранга $k < m$, неприводимого в точке O аналитического многообразия Δ_m, определяемого уравнениями

$$\varphi_\nu(x)_n = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, N,$$

где $\varphi_\nu(x)_n$ — аналитические функции в точке O. Существует такая точка t_0, что уравнения

$$\varphi_\nu(x)_n = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, N,$$

$$q_i(x)_n t_i - p_i(x)_n = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

имеют в точке $\{O, t_0\}$ многообразие решений $F^{(m-k)}(t)$, параметрически зависящее от t и удовлетворяющее условиям: 1) на $F^{(m-k)}(t)$ ни при каком значении i функции $p_i(x)_n$ и $q_i(x)_n$ не обращаются тождественно в нуль, 2) при каждом $t = t'$ из окрестности t_0 $F^{(m-k)}(t')$ содержит точку O.

Пусть, наконец, w — мероморфная в точке O функция, которая не является вполне неопределенной на Δ_m и $\not\equiv 0$, и пусть ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial t_\lambda}{\partial x_\mu} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x_\mu} \end{pmatrix}, \lambda = 1, 2, \ldots, k, \mu = 1, 2, \ldots, n,$$

на Δ_m равен k.

Тогда на Δ_m существует алгебраическая зависимость между w и $t_1, t_2, \ldots, t_k$.

Приводимый в заключение автором пример показывает, что предположения этой теоремы об отображении A_k существенны и их нельзя опустить. *А. В. Лебедев*

5553. Две основные теоремы теории распределения значений для функций многих комплексных переменных (I). Штолль (Die beiden Hauptsätze der Wertverteilungstheorie bei Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen (I). Stoll Wilhelm), Acta math., 1953, **90**, № 1—2, 1—115 (нем.)

Первая часть работы состоит из двух глав.

Первая глава содержит довольно обширный подготовительный материал; в частности, без доказательств приводятся основные понятия и теоремы теории мероморфных кривых Вейля-Альфорса, в которой обе основные теоремы теории распределения значений мероморфной функции переносятся на мероморфную вектор-функцию $\mathfrak{w}(P)$, отображающую двумерную риманову поверхность $\mathfrak{M}^2$ в комплексно-проективное пространство $\mathfrak{P}^{2k-2}$. Здесь вводится понятие мероморфной поверхности, обобщающей понятие мероморфной кривой и определяющей отображение многообразия $\mathfrak{M}^2$ в проективное пространство $\mathfrak{P}^{2k-2}$.

Во второй главе, на основе обобщенной на случай нескольких переменных формулы Иенсена, дается первая основная теорема теории распределения значений, перенесенная на мероморфную поверхность или, другими словами, на систему мероморфных функций; исследуются различные свойства и представления характеристики. В заключение автор приводит обобщение теоремы Лиувилля на случай мероморфной поверхности.

А. В. Лебедев

5554. Теорема о сохранении области для некоторых эллиптических систем дифференциальных уравнений и ее применения. Положий Г. Н., Матем. сб., 1953, **32** (74), № 3, 485—492

В § 1 доказывается, что любое непрерывно дифференцируемое решение линейной эллиптической системы

$$au_x + bu_y - v_y = 0, \quad du_x + cu_y + v_x = 0$$

с коэффициентами, обладающими гельдеровскими производными, преобразует произвольную область плоскости (x, y) в область плоскости (u, v). Доказательство основано на объединении результата Карлемана о единственности решения задачи Коши и одного замечания Сциларда (Szilàrd K., Math. Z., 1927, **26**, № 4, 653—671).

В § 2 доказывается теорема о том, что для локальной однолистности отображения рассматриваемого класса в некоторой точке необходимо и достаточно, чтобы якобиан отображения в этой точке не обращался в нуль. Вспомогательный материал этого параграфа не нов — лемма о растяжениях вытекает из леммы о максимальных растяжениях работы референта (Матем. сб., 1946, **17**(59), № 2, 193—210), лемма о локальном приведении эллиптических систем приведена в обзорной статье А. Д. Мышкиса (Успехи матем. наук, 1948, **3**, № 2 (24), 3—46).

В § 3 приведены некоторые общие качественные результаты теории фильтрации в неоднородной среде, основанные на топологических свойствах комплексного потенциала. *Б. В. Шабат*

5555 Д. Квазиконформные отображения. Белинский П. П. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Львовский ун-т, Львов, 1954

5556 Д. Численный метод определения функции, конформно отображающей круг на многоугольники. Чистяков Ю. В. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Томский ун-т, Томск, 1954

См. также: 5432, 5491, 5570, 5579, 5580, 5611, 5613, 5618, 5627, 5636

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

5557. О решениях дифференциальных уравнений Эрмита и Лагерра. Янкович (On solutions of Hermite's and Laguerre's differential equation. Jankovic Zlatko), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1953, сер. 2, 8, № 2, 133—148 (англ.; резюме хорв.)

Дается элементарный способ построения решений дифференциальных уравнений Эрмита и Лагерра при целых значениях параметра и вывод простейших свойств рассматриваемых функций (рекуррентные соотношения, производящая функция, ортогональность и т. д.). Наряду с полиномами Эрмита и Лагерра, исследуются вторые линейно независимые решения соответствующих дифференциальных уравнений.

Работа не содержит каких-либо новых результатов, относящихся к теории функций рассматриваемого типа и, согласно утверждению автора, преследует чисто методическую цель получить свойства функций Эрмита и Лагерра с целым значком непосредственно из дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют эти функции.

Н. Н. Лебедев

5558. Малые колебания динамических систем. Эрдёш (Kleine Schwingungen dynamischer Systeme. Erdös Paul), Z. angew. Math. und Phys., 1953, **4**, № 3, 215—219 (нем.)

Предлагается матричный способ построения решений линейных канонических уравнений с постоянными коэффициентами для случая, когда матрица H коэффициентов функции Гамильтона имеет простые элементарные делители. Пусть $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{OE} \\ -\mathbf{EO} \end{pmatrix}$, где $\mathbf{E}$ — единичная матрица, и $\mathbf{q}$ — вектор с компонентами $q_1, q_2, \ldots, q_{2n}$. Тогда канонические уравнения имеют решения

$$\mathbf{q} = e^{\mathbf{QH}\,(t-t_0)}\,\mathbf{q}_0. \qquad (1)$$

Выведена вспомогательная формула

$$f(\mathbf{M}) = \sum_{j=1}^{r} f(z_j) \left(\frac{z - z_j}{z\mathbf{E} - \mathbf{M}} \right)_{z=z_j}, \qquad (2)$$

где $\mathbf{M}$ = матрица с элементарными делителями $z - z_j$, а $f(z)$ — регулярная аналитическая функция. С помощью формулы (2) дано явное представление решения (1) через корни уравнения $|z\mathbf{E} - \boldsymbol{QH}| = 0$. Это же решение представлено в виде контурного интеграла. Библиография, 8 названий.

И. С. Аржаных, В. С. Рабинович

5559. Матричный анализ линейных систем с переменными параметрами. Пайпс (Matrix analysis of linear time-varying circuits. Pipes Louis A.), Trans. Inst. Radio Engrs, 1953, PGCT-2, Dec. 91—105 (англ.)

Описывается известная электрическая схема, приводящая к уравнению типа Матье — Хилла

$$\ddot{x} + F(t)\,x = 0. \qquad 1)$$

Рассматривается случай, когда периодическая функция $F(t)$ в пределах полупериода $T/2$ (или периода T) такова, что уравнение (1) для $0 \leqslant t \leqslant T/2$ (или $0 \leqslant t \leqslant T$) интегрируется в элементарных функциях. Тогда $x(nT/2)$ (или $x(nT)$), где $n = 1,2, \ldots$, легко определяются по $x(0)$. Выводится элементарное матричное соотношение, решающее эту задачу:

$$[x(nT)] = [M]^n\,[x(0)],$$

где матрица

$$[M] = [u(T)]\,[u(0)]^{-1}.$$

Здесь

$$[u(t)] = \begin{Vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ \dot{u}_1(t) & \dot{u}_2(t) \end{Vmatrix},$$

а функции u_1 и u_2 суть линейно независимые на отрезке $0 < t \leqslant T$ решения уравнения (1).

М. А. Айзерман

5560. Определители бесконечного порядка в теории уравнений Матье и Хилла. Магнус (Infinite determinants in the theory of Mathieu's and Hill's equations. Magnus Wilhelm), Mathematics Research Group, Washington Square College of Arts and Science, New York University, Research Rep., № BR-1, i+ 37 pp., 1953 (англ.)

Автор исходит из дифференциального уравнения Матье в тригонометрической форме и выводит определитель Хилла для вычисления характеристических коэффициентов. Затем он занимается особым классом матриц и определителей бесконечного порядка.

При помощи общих свойств этих матриц и определителей удается вывести ряд предложений о решениях дифференциального уравнения Матье. Для определителей Матье строится мажоранта.

Значения решений уравнения Матье для значений $\pi/2$ и π независимых переменных выражаются через определители бесконечного порядка. Решения дифференциальных уравнений Матье даны при помощи интеграла Фурье. На основании изложенного обсуждаются некоторые обобщения на дифференциальные уравнения Хилла. Результаты применяются для построения сред, в которых возможно распространение волн.

M. J. O. Strutt

Перевод из Math. Rev., 1953, № 11, № 11, 1087

5561. К вопросу о максимальной величине решений линейного дифференциального уравнения второго порядка с полиномиальными коэффициентами. Пёшль (Zur Frage des Maximalbetrages der Lösungen linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Polynomkoeffizienten. Pöschl Klaus), Math. Ann., 1953, 125, № 4, 344—349 (нем.)

В статье рассматривается дифференциальное уравнение

$$w'' + c_1(z)\,w' + c_2(z)\,w = 0,$$

где

$$c_1(z) = az^{k_1} + bz^{k_1-1} + \ldots,$$
$$c_2(z) = \alpha z^{k_2} + \beta z^{k_2-1} + \ldots$$

при разных значениях целочисленных k_i $(i = 1, 2)$

и разыскиваются условия существования решений вида

$$w = e^{Q(x)} S(x),$$

где $Q(x)$ и $S(x)$ — некоторые многочлены.

Заключения пункта 2 относительно решений уравнения

$$w'' + (az + b) w' + (\alpha z^2 + \beta z + \gamma) w = 0$$

неверны, так как введенное автором преобразование

$$t = \frac{a + 4s}{2} z_1^2$$

приводит к уравнению с дробными показателями независимого переменного, а не с целыми, как дано у автора. Имеются еще две (небольших) ошибки — в других местах.

Надо отметить, что найденные в статье результаты получаются как частный случай из общей теории нормальных решений линейных дифференциальных уравнений (см. Латышева К. Я., Успехи матем. наук, 1953, **8**, № 5, 205—212; Наукові зап. Київськ. держ. ун-та мат. збірн., 1952, № 6, 25—46, 1953, № 7, 95—100). *К. Я. Латышева*

5562. Метод решения нелинейных дифференциальных уравнений третьего и высшего порядка. Г у (A method for solving third and higher order nonlinear differential equations. K u Y. H.), J. Franklin Inst., 1953, **256**, № 3, 229—244 (англ.)

Обобщается метод фазовой плоскости для уравнений третьего порядка

$$\dddot{x} + \varphi(\dot{x})\ddot{x} + f(\dot{x}, x) + f_1(x) = F(t), \qquad (1)$$

а также для общего случая нелинейного дифференциального уравнения высшего порядка вида

$$x^{(n)} + \varphi_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + \varphi_2 \ddot{x} + f(\dot{x}, x) + f_1(x) = F(t), \qquad (2)$$

где $x^{(i)} = \frac{d^i x}{dt^i}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, φ_{i-1} $(i=3, \ldots, n)$ — нелинейные функции от $x^{(i-1)}$ и низших производных. Кроме того, все функции φ, f и f_1 могут содержать время t.

В случае уравнения (1) вводятся обозначения $\ddot{x} = h$, $\dot{x} = g$, $\dot{x} = v$, после чего уравнение (1) принимает вид системы:

$$\frac{dg}{dv} = \frac{h(g, v, x, t)}{g} = \frac{F(t) - \varphi(v) g - f(v, x) - f_1(x)}{g}, \qquad (3)$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{g}{v}. \qquad (4)$$

Уравнение (3) определяет наклон g-v траектории на плоскости (v, g), уравнение (4) — наклон v-x траектории на плоскости (x, v).

Далее предлагается прием приближенного построения решений системы (3) и (4), состоящий в следующем: исходят из начальных условий (t_0, x_0, v_0, g_0), задают малое приращение Δv, по нему определяют Δg, затем используют уравнение (4), определяют Δx, затем снова возвращаются к уравнению (3) и т. д. Шаг за шагом одновременно строятся g-v и v-x траектории. Даются применения этого и аналогичных методов для ряда конкретных уравнений. *Ю. А. Митропольский*

5563. Об одном итеративном методе для нелинейных колебаний. Р о б е р с о н (On an iterative method for nonlinear vibrations. R o b e r s o n R. E.), J. Appl. Mech., 1953, **20**, № 2, 237—240 (англ.)

Автор, ссылаясь на Брока и Цзян Гуо-финя (Brock J. E., J. Appl. Mech., 1951, **73**,1—11; Djang Gwoh-Fan, J. Franklin Institute, 1948, **246**, 453—457), рассматривает итеративный метод для нахождения колебательных решений нелинейных дифференциальных уравнений $\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$, а также системы двух нелинейных уравнений.

На примерах показывается применение метода к нахождению вынужденных периодических решений одной системы с двумя степенями свободы без затухания и системы с одной степенью свободы с линейным затуханием. Автор отмечает сходство приближенных формул для «амплитуд», полученных рассматриваемым методом, с аналогичными формулами, полученными методом Даффинга (Стокер, Нелинейные колебания в механических и электрических системах гл. 4, Изд-во иностр. лит-ры, 1953).

Круг вопросов, связанных со сходимостью метода, не рассматривается по существу.

А. В. Драгилев

5564. К интегрированию дифференциальных уравнений второго порядка с рациональным представлением. К а л и г о (Sulla integrazione delle equazioni differenziali del secondo ordine a riferimento razionale. C a l i g o D o m e n i c o), Univ. Roma Ist. Naz. Alta Mat. Rend. Mat. e Appl., 1952, 11, 322—337; Consiglio Naz. ricerche, Pubbl. Ist. Appl. Calcolo, 1953, № 353 (итал.)

Автор рассматривает решение дифференциального уравнения $\Phi(\ddot{x}, \dot{x}, x) = 0$, где левая часть есть однородный многочлен трех аргументов, методом, который коротко говоря, состоит в следующем. Если $\dot{x}/x$ и $\ddot{x}/x$ рассматривать как неоднородные декартовы координаты точки, то уравнение изображает некоторую кривую C. Получаем параметрическое представление C. Затем независимая переменная определяется через параметр с помощью квадратуры, а решение получается другой квадратурой. Настоящая заметка посвящена главным образом детальному рассмотрению большого числа примеров, в частности таких, в которых параметрическое представление C рационально.

L. A. MacColl

Перевод из Math. Rev., 1953 **14**, № 10, 982.

5565. О нахождении предельных циклов. Г о т ь е (Au sujet de la recherche des cycles limites. G a u t h i e r L u c), Actes du Colloque International des vibrations non linéaires, Ile de Porquerolles, 1951, 257—259; Publ. Sci. Tech. Ministère de l'Air, Paris, № 281, 1953

Перевод из Math. Rev., 1954, **15**, № 1, 1.

5566. Об асимптотическом поведении решений дифференциального уравнения $y'' + A(x) y = 0$,

$A(x)\geqslant 0$. **Гальярдо** (Sul comportamento asintotico degli integrali dell'equazione differenziale $y''+A(x)y=0$, con $A(x)\geqslant 0$. Gagliardo Emilio), Boll. Unione mat. ital., 1953, сер. 3, 8, № 2, 177—185 (итал.)

Исследуется дифференциальное уравнение

$$y''+A(x)\,y=0,\quad x\geqslant x_0>0, \tag{1}$$

где $A(x)$ — неотрицательная непрерывная функция, и путем весьма простых рассуждений устанавливаются следующие свойства его решений:

а) если $\int\limits_{x_0}^{\infty} A(x)\,dx=\infty$, то любое нетривиальное решение является осциллирующим;

б) если $\int\limits_{x_0}^{\infty} A(x)\,dx<\infty$ и $a_1<a_2<\cdots$ — последовательность нулей осциллирующего решения, то ряд $\sum\limits_n (a_{n+1}-a_n)^{-1}$ сходится;

в) если разность $B(x)=A(x)-\dfrac{1}{4x^2}$ неотрицательна и $\int\limits_{x_0}^{\infty} xB(x)\,dx=\infty$, то любое нетривиальное решение является осциллирующим.

Указаны также некоторые асимптотические свойства неосциллирующих решений уравнения (1). Следует отметить, что свойство б) является непосредственным следствием неравенства Н. Е. Жуковского (Матем. сб., 1892, **16**, 582—591).

И. М. Рапопорт

5567. Об асимптотическом поведении решений уравнения $y''-(1+\eta)y=0$. Асколи (Sul comportamento asintotico delle soluzioni dell'equazione $y''-(1+\eta)y=0$. Ascoli G.), Boll. Unione mat. ital., 1953, сер. 3, 8, № 2, 115—123 (итал.)

Указаны новые сравнительно простые и единообразные доказательства ряда известных теорем об асимптотическом поведении решений линейного дифференциального уравнения 2-го порядка. В частности, разобрано асимптотическое поведение решений при каждой из следующих гипотез: 1) $|\eta|^p$ $(1\leqslant p\leqslant 2)$ интегрируема на $[0,+\infty]$. 2) $1+\eta=\beta^2+C$, $\beta^2\to 1$ при $x\to\infty$, и имеет ограниченное изменение на $[0,+\infty]$ и $|C|$ интегрируемо на $[0,\infty]$.

И. М. Рапопорт

5568. Об одном нелинейном дифференциальном уравнении второго порядка. Модона (Su di una equazione differenziale non lineare del secondo ordine. Modona Lionella Neppi), Boll. Unione mat. ital., 1953, сер. 3, 8, № 4, 428—441 (итал.)

Исследуется устойчивость решений дифференциального уравнения

$$y''+y'\,|y'|+y'q(y)+y-p^2y^3=0, \tag{1}$$

где $q(y)$ — положительная, непрерывная и дифференцируемая функция, удовлетворяющая при $|y|\to\infty$ асимптотическому соотношению

$$q'(y)=o(|y|^{1/2}),$$

p — положительная константа. Показано, что если точка (η_0,ζ_0) лежит внутри некоторой области Z, то решение дифференциального уравнения (1), определяемое начальными условиями

$$y(t_0)=\eta_0,\quad y'(t_0)=\zeta_0,$$

удовлетворяет предельному соотношению

$$\lim_{t\to\infty}[y^2(t)+y'^2(t)]=0.$$

Для частного случая, когда $q(y)$ — положительная константа, аналогичный результат был получен ранее Чеккони (Cecconi J., Ann. Scuala norm. sup. Pisa, 1950, **4**, 245—262).

И. М. Рапопорт

5569. Динамические системы с наследственностью бушующего типа. Фогель (Systèmes dynamiques héréditaires à déferlement. Vogel Théodore), Ann. télécommuns, 1953, 8, № 11, 354—360 (франц.)

Рассматривается заданная в некоторой области D плоскости xy бушующая (деферлянтная) динамическая система (РЖМат, 1953, 1185), определяемая для любого момента времени t одним из двух законов:

$$\frac{dx}{X_1(x,y)}=\frac{dy}{Y_1(x,y)}=dt \tag{1}$$

или

$$\frac{dx}{X_2(x,y)}=\frac{dy}{Y_2(x,y)}=dt, \tag{2}$$

где предполагается, что функции $X_i=X_i(x,y)$ и $Y_i=Y_i(x,y)$ $(i=1,2)$ обеспечивают существование и единственность решений уравнений (1) и (2) всюду, за исключением некоторого числа особых точек. Под траекторией такой системы понимается кусочно-гладкая кривая, состоящая из последовательно чередующихся дуг R и S траекторий уравнений (1) и (2), причем изображающая точка $P(x,y)$ переходит с одной дуги на другую всякий раз, когда она попадает на границу T области D.

Автор изучает главным образом существование замкнутых циклов и их устойчивость. На частных примерах разбирается ряд случаев, которые тут могут представиться; однако анализ явления полностью не проводится. Указывается, что бушующие системы допускают реализацию с помощью электрических схем, и приводятся осциллограммы колебаний таких систем.

Далее вводится более широкое понятие динамических систем с наследственностью в смысле Вольтерра, под которыми в простейшем случае понимаются интегро-дифференциальные уравнения, содержащие интегралы в смысле Стилтьеса вида $\int F(P)\,df(P)$, взятые вдоль траектории изображающей точки $P(x,y)$, причем значение интеграла в точке P зависит, вообще говоря, от прежних положений этой точки — ее «предков» (явление наследственности). Бушующая система (1), (2) является системой с наследственностью, так как ее можно записать в следующем виде:

$$\frac{dx}{X_1+(X_2-X_1)\int df}=\frac{dy}{Y_1+(Y_2-Y_1)\int df}.$$

где функция $f = f(x, y)$ такова, что $\int_R df = 0$ для дуг траекторий R уравнения (1) и $\int_S df = 1$ для дуг траекторий S уравнения (2).

В заключение рассматриваются некоторые элементарные примеры эволюции динамической бушующей системы при непрерывном изменении функций, определяющих ее наследственность.

В целом работа носит описательный характер и не содержит сколько-нибудь общих математических формулировок. *Б. П. Демидович*

5570. Критерий устойчивости Михайлова — Леонарда. Хеллер, Веверка (Michajlovovo-Leonhardovo kriterium stability, Heller Bedřich, Veverka Antonin), Elektrotechn. obzor, 1953, **42**, № 9, 467—478 (чеш.)

А. В. Михайлов (Автоматика и телемеханика, 1938, № 3) предложил при анализе условий устойчивости линейных систем автоматического регулирования вместо алгебраических критериев устойчивости (например, вместо критерия Рауса — Гурвица) непосредственно использовать принцип аргумента Коши, который приводит к критерию: «Для того, чтобы все корни характеристического полинома $F(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n$ располагались слева от мнимой оси, необходимо и достаточно, чтобы $\arg F(i\omega)$ изменялся на $\frac{\pi}{2} n$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ и чтобы при этом $|F(i\omega)|$ не обращался в нуль». Приращение $\arg F(i\omega)$ определяется при этом построением годографа $F(i\omega)$. Критерий устойчивости в такой форме часто используется в теории автоматического регулирования, так как при практических расчетах построение годографа $F(i\omega)$ оказывается при больших n более простым, чем использование алгебраических критериев. Реферируемая статья содержит изложение критерия А. В. Михайлова и примеры его приложения.

М. А. Айзерман

5571. Об устойчивости движения на конечном интервале времени. Каменков Г. В., Прикл. матем. и механика, 1953, **17**, № 5, 529—540

Рассматривается система уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt} = p_{i1}x_1 + \ldots + p_{in}x_n + X_i(x_1, \ldots, x_n, t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (1)$$

где $p_{ij}(t)$ — вещественные, непрерывные и ограниченные функции времени, а функции X_i разлагаются в окрестности точки $x_1 = \ldots = x_n = 0$ в ряды по степеням $x_1, \ldots, x_n$ с непрерывными и ограниченными по отношению к t коэффициентами, причем эти разложения начинаются с членов не ниже второго порядка.

Невозмущенное движение называется устойчивым на конечном интервале времени, если при достаточно малом числе $A > 0$ решения $x_s(t)$ $(s=1, 2, \ldots, n)$ уравнений (1) удовлетворяют неравенству

$$\sum_{s=1}^{n} (a_{s1}x_1 + \ldots + a_{sn}x_n)^2 \leqslant A, \quad |a_{ik}|_1^n \neq 0 \qquad (2)$$

для всех t из интервала $[t_0, t_0 + \tau]$ $(\tau > 0)$, при условии, что начальные значения $x_s(t_0)$ удовлетворяют тому же неравенству (2). В противном случае невозмущенное движение называется неустойчивым на конечном интервале времени.

При таком определении устойчивость или неустойчивость данной системы зависит от выбора коэффициентов a_{ij}, поэтому для того чтобы придать большую четкость формулировкам автора, будем указывать, по отношению к какой форме изучается устойчивость. Система (1) представляется в форме

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t_0)\, x_i + \sum_{k=1}^{n} [p_{ik}(t) - p_{ik}(t_0)]\, x_i + X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$$

и при помощи линейного преобразования

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n,$$

система

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t_0)\, x_i$$

приводится к канонической действительной форме. Во всей дальнейшей работе изучается устойчивость по отношению к форме

$$\sum_{i=1}^{i=n} (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots a_{in}x_n)^2 = \sum_{i=1}^{i=n} y_i^2. \qquad (I)$$

Доказывается, что невозмущенное движение устойчиво на конечном интервале $[t_0, t_0 + \tau]$ по отношению к форме (I), если характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} p_{11}(t_0) - \lambda \ldots p_{1n}(t_0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_{n1}(t_0) \ldots p_{nn}(t_0) - \lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad (3)$$

не имея кратных корней, имеет лишь корни с отрицательными вещественными частями. Если среди корней уравнения (3) имеется по крайней мере один корень с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение неустойчиво на конечном интервале. Когда среди корней уравнения (3) имеются нулевые и чисто мнимые корни при остальных корнях с отрицательными вещественными частями, вопрос об устойчивости на конечном интервале не решается рассмотрением только уравнений первого приближения.

Если уравнение (3) имеет кратные корни с отрицательными вещественными частями λ_s, то для устойчивости на конечном интервале $[t_0, t_0 + \tau]$ по отношению к форме (I) необходимо и достаточно, чтобы были положительными все диагональные миноры определителей.

$$D(\lambda_s) = \begin{vmatrix} -\lambda_s - 1/2 & 0 \dots 0 0 \\ -1/2 - \lambda_s - 1/2 \dots 0 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ 0 \quad 0 \quad 0 \dots -1/2 - \lambda_s \end{vmatrix} \quad (s=1,2,\dots,\alpha),$$

соответствующих группам уравнений, на которые разбивается в этом случае система (1) при приведении ее линейной части (вычисленной при $t=t_0$) к каноническому виду. *Н. Н. Красовский*

5572. К задаче об устойчивости движения на конечном интервале времени. Лебедев А. А., Прикл. матем. и механика, 1954, 18, № 1, 75—94

Рассматривается система уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = p_{i1}(t)\,x_1 + \dots + p_{in}(t)\,x_n + X_i(t, x_1, \dots, x_n) \cdot (i=1, \dots, n).$$

Автор развивает результаты, полученные Г. В. Каменковым (см. реф. 5571). Вначале дается другая формулировка этих результатов. Теорема 1 указывает необходимые и достаточные условия существования по крайней мере какого-либо конечного интервала времени, на котором движение устойчиво по первому приближению, и соответствует теоремам 1—4 цитированной работы. Теорема 2 устанавливает достаточные условия устойчивости по первому приближению на данном интервале времени $[t_0, T]$ и отвечает данному в указанной работе способу определения интервала времени, на котором движение устойчиво.

Теорема 4 дает достаточные условия устойчивости в конечной области на данном интервале времени $[t_0, T]$.

Далее теоремой 5 решается задача об устойчивости в конечной области при конечных постоянно действующих возмущающих силах, представленных в виде

$$R_i = l_{i1}(t)\,x_1 + \dots + l_{in}(t)\,x_n + \Delta X_i(t, x_1, \dots, x_n)$$

и обращающихся в нуль, когда все $x_i = 0$.

Приводится способ определения интервала времени, на котором движение устойчиво, основанный на исследовании устойчивости по участкам. Достаточные условия, при выполнении которых такое исследование возможно, формулируются в теореме 3.

В заключение даны примеры исследования систем 2-го порядка. *Г. В. Каменков*

Примечание редакции. Относительно определения устойчивости на конечном интервале см. реф. 5571. В работе А. А. Лебедева изучается устойчивость по отношению к той же форме, что и в указанной статье Г. В. Каменкова.

5573. Оценка радиуса сходимости рядов по степеням малого параметра, представляющих периодические решения систем дифференциальных уравнений. Крумиг А. А., Укр. матем. ж., 1953, 5, № 4, 434—438

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

где F_i — непрерывные периодические функции от t периода 2π.

Пусть $x_i = \varphi_i(t)$ — изолированное периодическое решение системы (1) при $\lambda = 0$. Предполагается, что правые части системы (1) могут быть разложены по степеням $x_i - \varphi_i(t)$ и λ.

Согласно исследованиям Пуанкаре, система (1) при достаточно малом λ имеет периодические решения, раскладывающиеся в ряды по степеням λ. Автор дает оценку для интервала изменения λ, в котором периодическое решение системы (1) наверняка существует. *В. Х. Харасахал*

5574. К теории Штурма — Лиувилля. Бремекамп (Sur la théorie de Sturm-Liouville. Bremekamp H., Anniversary volume on applied mechanics dedicated to C. B. Biezeno, pp. 38—56, N. V. De Technische Uitgeverij H. Stam, Haarlem, 1953) (франц.)

Метод последовательных приближений Пикара (Picard E., Traité d'analyse, v. III, 3-me ed., Gauthier-Villars, Paris, 1928) обобщен так, что дает новое доказательство существования бесконечной последовательности собственных значений $\lambda = \lambda_n$, $n = 1, 2, \dots$, для краевой задачи типа

$$\frac{d}{dx}\left(K(x,\lambda)\frac{dy}{dx}\right) + G(x,\lambda)\,y = 0, \quad y(a) = y(b) = 0.$$

Накладываются следующие условия:

1) $K(x, \lambda)$ и $G(x, \lambda)$ непрерывны и положительны при $a \leqslant x \leqslant b$, $\lambda > \lambda_0$ и $\partial K / \partial x$ непрерывна там же;

2) $K(x, \lambda)$ не зависит от λ или есть убывающая функция от λ, удовлетворяющая неравенству вида $K(x, \lambda) < K(x, \lambda_0) / \psi(\lambda)$, где $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \psi(\lambda) = \infty$;

3) $G(x, \lambda)$ есть возрастающая функция от λ такая, что $G(x, \lambda) > G(x, \lambda_0)\,\varphi(\lambda)$, где $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \varphi(\lambda) = \infty$.

Показано, что собственные функции, соответствующие λ_n, обращаются в нуль $n-1$ раз в $a < x < b$. Имеется распространение на более общие линейные граничные условия. *W. Wasow.*

Перевод из Math. Rev., 1953, 14, № 11, 1088.

5575. Двухточечная краевая задача для обыкновенных самосопряженных дифференциальных уравнений четного порядка. Кауфман, Стернберг (A two-point boundary problem for ordinary self-adjoint differential equations of even order. Kaufman H., Sternberg R. L). Duke Math. J., 1953, 20, № 4, 527—531 (англ.)

Исследуется самосопряженное дифференциальное уравнение

$$[p_0(x)\,u^{(n)}]^{(n)} - [p_1(x)\,u^{(n-1)}]^{(n-1)} + \dots$$
$$\dots + (-1)^n p_n(x)\,u = 0, \quad n \geqslant 2, \; x \geqslant a > 0,$$

где $p_i(x)$ — вещественные функции, удовлетворяющие в интервале $[a, \infty)$ условиям: 1) $p_i(x) \in C^{n-i}$, 2) $p_0(x) \geqslant k_0 x^{2n-2}$, $k_0 > 0$, 3) интегралы $\int\limits_a^\infty x^{2i-1}\,p_i(x)\,dx$, $i = 1, 2, \dots, n$, сходятся. Под решением этого дифференциального уравнения понимается вещественная функция $u(x) \in C^n[a, \infty)$, удовлетворяющая условиям $p_i(x)u^{(n-1)} \in C^{(n-i)}[a, \infty)$ и обращающая дан-

ное уравнение в тождество. Доказывается существование такого $a_0 \geqslant a$, при котором любое нетривиальное решение рассматриваемого дифференциального уравнения может обращаться в нуль одновременно со всеми своими производными вплоть до $n-1$-й включительно не более чем в одной точке интервала $[a_0, \infty)$. Автор указывает (не приводя доказательства), что аналогичное утверждение верно для векторных дифференциальных уравнений четного порядка, в которых $p_i(x)$ — вещественные симметрические матрицы-функции (вместо условия 2) в этом случае должно выполняться условие $\pi^* p_0(x)\pi \geqslant k_0 x^{2n-2}\pi^*\pi$, $k_0 > 0$, для любого вещественного вектора π при любом $x \geqslant a$). *И. М. Рапопорт*

5576. Об одной граничной задаче для дифференциального уравнения $y^{(n)}=f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$. Вольпато (Sopra un problema al contorno per l'equazione differenziale $y^n = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$. Volpato Mario), Rend. Seminar mat. Univ. Padova, 1953, 22, № 2, 334—349 (итал.)

В первой части статьи автор дает формулировку достаточных условий для существования решения граничной задачи

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \\ y(x_1) = c_1,\ y(x_2) = c_2, \ldots, y(x_n) = c_n, \end{cases}$$

причем решение должно быть абсолютно непрерывным вместе с $(n-1)$ производными при $a \leqslant x \leqslant b$. Правая часть уравнения измерима по x и непрерывна по всем остальным аргументам в области T: $a \leqslant x \leqslant b$; $|y^{(i)}| < \infty$; $i = 0, 1, 2, \ldots, n$; $y^{(0)} = y$.

Условия теоремы 1, из которой делаются все выводы, формулируются весьма сложно (в тексте формулировка занимает три страницы). Кроме основного ограничения на правую часть: в области T выполняется неравенство

$$|f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}| < \psi(x),$$

где $\psi(x)$ — неотрицательная суммируемая функция, налагается ряд ограничений на поведение правой части в некоторой определенной окрестности полинома $G(x)$ и его производных. Полином $G(x)$ $(n-1)$-й степени и удовлетворяет условиям задачи $G(x_i)=c_i$.

Во второй части статьи показано, что из теоремы автора, как частный случай, получаются результаты Цвирнера (Zwirner G., Rend. Accad. d'Italia, 1942, сер. 7, **3**, № 6, 217—222) и Чинкуини (Cinquini S., Ann. Scuola Norm. sup. Pisa, 1940, сер. 2, 9, 61—77), а в третьей формулируется некоторый новый критерий и на примере проводится сравнение результатов автора с результатами применения теорем Цвирнера и Чинкуини. *М. И. Ельшин*

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

5577. Смешанные краевые задачи. Комацу (Mixed boundary value problems. Komatu Yûsaku), J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I, 1953, **6**, 345—391 (англ.)

Смешанная краевая задача, рассматриваемая в этой статье, состоит в следующем: если D — многосвязная область, ограниченная конечным числом гладких кривых $C = C_1 \cup C_2$, то требуется построить гармоническую функцию по ее граничным значениям на C_1 и значениям нормальной производной на C_2. Автор показывает, что роль функций Грина и Неймана первой и второй краевых задач здесь играет сингулярная функция, тесно связанная с отображающей функцией (c) другой работы автора (РЖМат, 1954, 4405). В случае единичного круга эта функция может быть явно определена, и это приводит к представлению гармонической функции через данные смешанной краевой задачи, аналогичному интегралу Пуассона. Показано также, что при приближении по точкам внутри угла это представление обладает таким же граничным поведением, что и интеграл Пуассона. Полное рассмотрение случая единичного круга требует довольно громоздких вычислений, которые проводятся со всей тщательностью. *Z. Nehari*

Перевод из Math. Rev., 1953, **14**, № 10, 969.

5578. О слабо нелинейных уравнениях эллиптического типа в частных разностях. Берс (On mildly nonlinear partial difference equations of elliptic type. Bers Lipman), J. Res. Nat. Bur. Standards, 1953, **51**, № 5, 229—236 (англ.)

Методом конечных разностей ищется решение 1-й краевой задачи $\boldsymbol{P}$ для нелинейного эллиптического уравнения

$$L \equiv [\varphi] \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - F\left(x, y, \varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = 0 \quad (1)$$

для $(x, y) \in \Omega$, $\varphi = v(x, y)$, $(x, y) \in \Omega' = \bar{\Omega} - \Omega$, где $v(x, y)$ — заданная функция, непрерывная в ограниченной замкнутой области $\bar{\Omega}$. Относительно $F(x, y, z, p, q)$ предполагается: $\frac{\partial F}{\partial z} \geqslant 0$; $\left|\frac{\partial F}{\partial p}\right|$, $\left|\frac{\partial F}{\partial q}\right| \leqslant A < +\infty$. Рассматривается сетчатая область Ω_h, состоящая из всех узлов P_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ сетки с шагом h по x и y таких, что $P_{i\nu}$ $(i = 1, 2, \ldots, N;\ \nu = 1, 2, 3, 4)$ лежат в $\bar{\Omega}$; границу Ω_h' области Ω_h составляют все узлы $P_j \in \bar{\Omega}_h$ $(j = N+1, \ldots, M)$, соседние с P_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ $(\bar{\Omega}_h = \Omega_h + \Omega_h')$. Ищется решение 1-й краевой задачи $\boldsymbol{P}_h$ для разностного уравнения

$$L_h[\varphi_i] \equiv \Delta_h[\varphi_i] - F(x_i, y_i, \varphi_i, D_{h,x}[\varphi_i], D_{h,y}[\varphi_i]) = 0, \quad (2)$$

$$i = 1, 2, \ldots, N,\ \varphi_j = v_j,\ j = N+1, \ldots, M,$$

где

$$\Delta_h[\varphi_i] = \frac{1}{h^2}\left(\sum_{\nu=1}^{4} \varphi_{i\nu} - 4\varphi_i\right), \quad D_{h,x}[\varphi_i] = \frac{\varphi_{i1} - \varphi_{i3}}{2h},$$

$$D_{h,y}[\varphi_i] = \frac{\varphi_{i2} - \varphi_{i4}}{2h};\quad Ah < 2\theta;\ 0 < \theta < 1.$$

Доказывается неравенство

$$\max_{\Omega_h} |\varphi^{\mathrm{I}} - \varphi^{\mathrm{II}}| \leqslant C \max_{\Omega_h} |L_h[\varphi^{\mathrm{I}}] - L_h[\varphi^{\mathrm{II}}]| + \max_{\Omega_h'} |\varphi^{\mathrm{I}} - \varphi^{\mathrm{II}}|, \quad C = C(A, \theta, \Omega), \quad (3)$$

справедливое для любых φ^{I} и φ^{II}, определенных на $\bar{\Omega}_h$. Из (3) следует единственность решения 1-й краевой задачи $\boldsymbol{P}_h$. В предположении существования решения φ 1-й краевой задачи $\boldsymbol{P}$ для (1) с помощью (3) показывается сходимость при $h \to 0$ решения $\varphi^{(h)}$ задачи $\boldsymbol{P}_h$ к решению φ. Дается эффективный метод построения решений задачи $\boldsymbol{P}_h$, сводящийся к следующему: если $f_i(z, \zeta^1, \ldots, \zeta^4) = z + \frac{h^2}{4} F\left(x_i, y_i; z, \frac{\zeta^1 - \zeta^3}{2h}, \frac{\zeta^2 - \zeta^4}{2h}\right)$ и $z = g_i(Z, \zeta^1, \ldots, \zeta^4)$ таковы, что $f_i(g_i(Z, \zeta^1, \ldots, \zeta^4); \zeta^1, \ldots, \zeta^4) \equiv Z$, то применяется одна из двух итерационных схем

$$\varphi_i^{(n+1)} = g_i\left(\frac{1}{4}\sum_{\nu=1}^{4} \varphi_{i\nu};\ \varphi_{i1}, \ldots, \varphi_{i4}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, N \qquad (A)$$

$$\varphi_j^{(n+1)} = \varphi_j^{(n)} = v_j, \quad j = N+1, \ldots, M;$$

$$\varphi_i^{(n+1)} = g_i\left(\frac{1}{4}\sum_{\nu=1}^{4} \tilde{\varphi}_{i\nu};\ \tilde{\varphi}_{i1}, \ldots, \tilde{\varphi}_{i4}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, N \qquad (B)$$

$$\varphi_j^{(n+1)} = \varphi_j^{(n)} = v_j, \quad j = N+1, \ldots, M,$$

где

$$\tilde{\varphi}_{i\nu}^{(n)} = \begin{cases} \varphi_{i\nu}^{(n+1)}, & \text{если } P_{i\nu} = P_j;\ j < i \\ \varphi_{i\nu}^{(n)} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказана сходимость при $n \to \infty$ итерационного процесса к решению задачи $\boldsymbol{P}_h$.

В конце работы рассмотрена 1-я краевая задача для эллиптического уравнения

$$L[\varphi] \equiv \Lambda[\varphi] - F\left(x, y, \varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = 0, \quad (4)$$

$$\Lambda[\varphi] \equiv a\varphi_{xx} + 2b\varphi_{xy} + c\varphi_{yy}$$

($a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ непрерывны в $\bar{\Omega}$ и удовлетворяют условию $ac - b^2 > 0$). Используя результаты Моцкина и Вазова (РЖМат, 1953, 896) о возможности аппроксимации Λ разностным оператором

$$\Lambda_h[\varphi] = \frac{1}{h^2} \sum_{r,\, s=-t}^{t} \rho^{rs}(x, y)\, \varphi(x + rh, y + sh),$$

где $\Lambda_h[\varphi] \equiv \Lambda[\varphi]$, если φ—многочлен 2-й степени, $\rho^{rs}(x, y) > 0$ для $(r, s) \neq (0, 0)$ и $0 < \frac{1}{K_1} \leqslant \sum_{(r,\, s) \neq (0,\, 0)} \rho^{rs}(x, y) < K_1$, и, вводя разностные операторы $D_{h,\, x}[\varphi] = \frac{1}{h} \sum_{r,\, s=-t}^{t} \sigma^{rs}(x, y)\, \varphi(x + rh, y + sh)$, $D_{h,\, y}[\varphi] = \frac{1}{h} \sum_{r,\, s=-t}^{t} \tau^{rs}(x, y)\, \varphi(x + rh, y + sh)$, где $\sigma^{00}(x, y) = \tau^{00}(x, y) \equiv 0$ $|\sigma^{rs}(x, y)|$, $|\tau^{rs}(x, y)| \leqslant K_2 |\rho^{rs}(x, y)|$ так, что $D_{h,\, x}[\varphi] = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $D_{h,\, y}[\varphi] = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$ для линейной функции, автор аппроксимирует (4) разностным уравнением

$$L_h[\varphi] \equiv \Lambda_h[\varphi] - F(x, y, \varphi, D_{h,\, x}[\varphi], D_{h,\, y}[\varphi]) = 0,$$

для которого ставится 1-я краевая задача $\boldsymbol{P}_h$, соответствующая 1-й краевой задаче $\boldsymbol{P}$ для (4), и утверждается, что доказательство существования и единственности решения $\boldsymbol{P}_h$ и сходимости его к решению задачи $\boldsymbol{P}$ проводится так же, как и для уравнения (2). *Л. И. Камынин*

5579. Об одном неравенстве для минимальных поверхностей $z = z(x, y)$. **Хопф** (On an inequality for minimal surfaces $z = z(x, y)$. Hopf Eberhard), J. Rational Mech. and Analysis, 1953, **2**, № 3, 519—522 (англ.)

Рассматривается минимальная поверхность S вида $z = z(x, y)$, определенная в круге $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2$, т. е. решение уравнения с частными производными

$$(1 + z_x^2) z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + (1 + z_y^2) z_{yy} = 0.$$

Э. Хейнц (Heinz E., Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-phys. Kl., 1952, 8, 51—56) доказал, что гауссова кривизна поверхности в начале координат удовлетворяет неравенству $|K| \leqslant \mu / R^2$, где μ—некоторая постоянная. Пользуясь некоторыми неравенствами для гармонических и конформных отображений, автор уточняет этот результат. Он показывает, что для кривизны минимальной поверхности в начале координат справедливо неравенство

$$|K| \leqslant k \frac{\zeta^2 (1 + \zeta^2)}{R^2},$$

где $\zeta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}$ —направляющий косинус нормали к поверхности и k — постоянная, не зависящая от R и от индивидуальной поверхности. В конце статьи приводится замечание об оценке величин постоянных μ и k, которое, однако, ошибочно (см. реф. 5580). *Б. В. Шабат*

5580. Исправление к статье «Об одном неравенстве для минимальных поверхностей $z = z(x, y)$». **Хопф** (Correction to the paper «On an inequality for minimal surfaces $z = z(x, y)$». Hopf Eberhard), J. Rational Mech. and Analysis, 1953, 2, № 4, 801—802 (англ.)

Указывается, что рассуждение об оценке снизу величины $x_\alpha^2 + x_\beta^2 + y_\alpha^2 + y_\beta^2$ для гомеоморфного гармонического отображения $x = x(\alpha, \beta)$, $y = y(\alpha, \beta)$ единичного круга на себя с неподвижной точкой в начале координат, на котором основано замечание об оценке постоянных в упомянутой статье (см. реф. 5579), является ошибочным. *Б. В. Шабат*

5581. Об уравнении $A_P u(P, t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + p(t)\frac{\partial}{\partial t} + q(t)\right) u(P, t)$ (A_P — линейный оператор) и решение задачи Коши для обобщенного уравнения Эйлера — Дарбу. **Олевский М. Н.**, Докл. АН СССР, 1953, **93**, № 6, 975—978

Автор устанавливает связь между решениями задачи Коши для гиперболических уравнений

$$A_p v = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + p_k(t)\frac{\partial v}{\partial t} + q_k(t)v, \quad k = 1, 2, \quad (1)$$

удовлетворяющими или условиям

$$v|_{t=0} = f, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad (2_1)$$

или условиям

$$v|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = f. \quad (2_2)$$

Здесь A_p есть линейный эллиптический оператор 2-го порядка, коэффициентами которого являются достаточно гладкие функции, а функции $p_k(t)$ и $q_k(t)$, $k = 1, 2$, предполагаются непрерывными для $t \geqslant 0$. Если через u_i и v_i обозначить решения уравнения (1) при $k = 1$ и $k = 2$ соответственно, отвечающие начальным условиям (2_i) $(i = 1, 2)$, то

$$u_i(P, t) = r(t)\,v_i(P, t) + \int_0^t K_i(\xi, t)\,v_i(P, \xi)d\xi, i = 1, 2,$$

где r и K_i суть функции, определяемые лишь через коэффициенты p_k и q_k $(k = 1, 2)$. Эти соотношения остаются справедливыми и для случая, когда оператор A_p есть оператор умножения на число λ. Далее приведены результаты аналогичных исследований для уравнения

$$\Delta_2 u = u_{tt} + a\sqrt{l}\operatorname{ctg}\sqrt{lt}\,u_t + bu,$$

где a, b и l — числа, а Δ_2 — второй дифференциальный оператор Бельтрами в m-мерном пространстве постоянной кривизны. *О. А. Ладыженская*

5582. О периодических решениях одного класса уравнений в частных производных. Соколов Г. Т., Докл. АН УзССР, 1953, № 12, 3—7, (русск., резюме узб.)

Автор исследует рассматривавшуюся ранее Н. А. Артемьевым (Изв. АН СССР, сер. матем., 1937, № 1, 15—50) и П. А. Соловьевым (Изв. АН СССР, сер. матем., 1939, № 2, 149—164) задачу: найти условия, при которых нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \Phi(x, t) + \mu f(Z) \quad (1)$$

допускает решение $Z(x, t)$, непрерывное вместе со своими частными производными второго порядка по x и по t в области

$$D\begin{pmatrix}0 \leqslant x \leqslant 1\\ 0 \leqslant t \leqslant 1\end{pmatrix}$$

и удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} &Z(0, t) = Z(1, t) = 0, \quad \left.\frac{\partial Z}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial Z}{\partial t}\right|_{t=1}, \\ &Z(x, 0) = Z(x, 1), \end{aligned} \quad (2)$$

Ограничения, накладываемые на функцию Φ автором, отличаются от принятых в работах Артемьева и Соловьева.

Теорема. Дифференциальное уравнение (1) допускает единственное, непрерывное вместе со своими частными производными второго порядка решение в области D, удовлетворяющее условиям (2), если:

1. Функция $\Phi(x, t)$ в D непрерывна, имеет непрерывную частную производную $\Phi_t'(x, t)$ с ограниченным изменением по аргументу x, является периодической по аргументу t с периодом, равным единице, и удовлетворяет условию

$$\Phi\left(x, t + \frac{1}{2}\right) = -\Phi(x, t).$$

2. Функция $f(Z)$ в области $0 \leqslant |Z| < \infty$ имеет непрерывную и ограниченную первую производную, непрерывную вторую производную и удовлетворяет условию

$$f(Z) = -f(-Z).$$

3. $a = \dfrac{4m}{p}$, где m — любое целое число, p — любое целое нечетное число.

4. $|\mu| < \dfrac{|a|\pi}{NA}$, где $N = \sup|f'(Z)|$,

$$A = \sup\int_0^1 d\xi \int_0^1 \left|\sum_{n=0}^{\infty} g_{2n+1}(x, \xi)\cos 2(2n+1)\pi(\eta - t)\right| d\eta,$$

$$g_{2n+1}(x, \xi) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\sin\dfrac{2(2n+1)}{a}\pi(1-\xi)\sin\dfrac{2(2n+1)}{a}\pi x}{(2n+1)\sin\dfrac{2(2n+1)}{a}\pi} & \text{при } x \leqslant \xi \\ \dfrac{\sin\dfrac{2(2n+1)}{a}\pi(1-x)\sin\dfrac{2(2n+1)}{a}\pi\xi}{(2n+1)\sin\dfrac{2(2n+1)}{a}\pi} & \text{при } x \geqslant \xi. \end{cases}$$

Теорема доказывается методом последовательных приближений. *Ш. И. Могилевский*

5583. О решениях нелинейных уравнений гиперболического типа. Соколов Г. Т., Докл. АН УзССР, 1953, № 4, 3—7 (русск.; резюме узб.)

Рассматривается следующая задача:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial Z}{\partial x}\right] - \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \Phi(x, t) + \mu f(Z), \quad (1)$$

$$Z(0, t) = Z(\pi, t) = 0; \quad Z(x, 0) = \varphi(x);$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t}(x, 0) = \Psi(x) \quad (2)$$

и исследуется решение в области

$$D\begin{Bmatrix}0 \leqslant x \leqslant \pi\\ 0 \leqslant t \leqslant 1\end{Bmatrix}.$$

Предполагается, что:

1) $\Phi(x, t)$ непрерывна, имеет непрерывную частную производную $\Phi_x'(x, t)$ с ограниченным изменением по каждому аргументу и разлагается в ряд

$$\Phi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(t)\,X_n(x),$$

где $X_n(x)$ — собственные функции краевой задачи

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dX_n}{dx}\right]+\lambda_n X_n=0;\ X_n(0)=X_n(\pi)=0; \quad (3)$$

2) $p(x)$ имеет непрерывную вторую производную с ограниченным изменением, $0\leqslant x\leqslant\pi$, $p(x)\geqslant b>0$;

3) $\varphi(x)$, $0\leqslant x\leqslant\pi$, имеет непрерывную третью производную с ограниченным изменением и удовлетворяет условиям $\varphi^{(k)}(0)=\varphi^{(k)}(\pi)=0$, $k=0,1,2$; $\Psi(x)$ имеет непрерывную вторую производную с ограниченным изменением и удовлетворяет условиям $\Psi^{(k)}(0)=\Psi^{(k)}(\pi)=0$, $k=0,1$;

4) $f(Z)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|f(Z_1)-f(Z_2)|<M|Z_1-Z_2|;\quad f(0)=0.$$

Тогда утверждается существование решения смешанной задачи (1), (2) в предположении, что

$$|\mu|\leqslant MA;$$

$$A=\sup_{(x,\,t)\in D}\int_0^t d\xi\int_0^\pi\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}X_n(x)X_n(\eta)\times\right.$$

$$\left.\times\sin\sqrt{\lambda_n}(\xi-t)\right|d\eta. \quad (4)$$

Доказательство (только намеченное) проводится при помощи использования метода последовательных приближений. За нулевое приближение берется решение задачи (1), (2) при $\mu=0$. При ограничениях (4) устанавливается единственность полученного решения.

Примечание референта. Автор не указывает области определения функции $f(Z)$. В работе имеются опечатки. *С. Д. Эйдельман*

5584. Применение метода Трефтца для нахождения оценки решений граничных задач и их производных. Куперман (An extension of the method of Trefftz for finding local bounds on the solutions of boundary value problems, and on their derivatives. Cooperman Philip), Quart. Appl. Math., 1953, **10**, № 4, 354—373 (англ.)

Рассматривается вопрос об оценке погрешности приближенного решения системы дифференциальных уравнений в частных производных для некоторого класса граничных задач, эквивалентных задаче о минимуме соответствующего квадратичного функционала. Предлагаемый метод проиллюстрируем на примере, приведенном автором.

Рассмотрим решение следующей граничной задачи:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}+f=0 \qquad \text{в } D, \quad (1)$$

$$u_1\frac{\partial x}{\partial n}+u_2\frac{\partial y}{\partial n}+g=0 \qquad \text{на } \gamma_1, \quad (2)$$

$$u=k \qquad \text{на } \gamma_2, \quad (3)$$

$$u_1=\frac{\partial u}{\partial x},\quad u_2=\frac{\partial u}{\partial y} \qquad \text{на } D+\gamma, \quad (4)$$

где $\gamma=\gamma_1+\gamma_2$ — граница области D, $\bar{n}$ — внешняя нормаль к γ.

Назовем эту задачу задачей 1. Введя функцию Грина, имеем:

$$u(x,y)=-\iint_{(D)}f(\xi,\eta)\left(\frac{1}{2\pi}\log r+R\right)d\eta\,d\xi+$$

$$+\int_{\gamma_1}g\left(\frac{1}{2\pi}\log r+R\right)ds+\int_{\gamma_2}k\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{2\pi}\log r+R\right)ds=$$

$$=\sigma(x,y)-\iint_{(D)}f(\xi,\eta)R\,d\xi\,d\eta+\int_{\gamma_1}gR\,ds+\int_{\gamma_2}k\frac{\partial}{\partial n}R\,ds,$$

где $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$, а R определяется, как решение следующей задачи:

$$\frac{\partial}{\partial x}R_1+\frac{\partial}{\partial y}R_2=0 \qquad \text{в } D, \quad (1')$$

$$R_1\frac{\partial x}{\partial n}+R_2\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n}(\log r)=0 \qquad \text{на } \gamma_1, \quad (2')$$

$$R=-\frac{1}{2\pi}\log r \qquad \text{на } \gamma_2, \quad (3')$$

$$R_1=\frac{\partial R}{\partial x},\quad R_2=\frac{\partial R}{\partial y} \qquad \text{в } D+\gamma. \quad (4')$$

Назовем эту задачу задачей 2.

Задачи 1 и 2 эквивалентны задачам о минимуме соответствующих функционалов

$$J_1(u')=\iint_{(D)}\left\{\frac{1}{2}(u_1'^2+u_2'^2)-fu'\right\}dxdy+\int_{\gamma_1}gu'ds,$$

$$J_2(R')=\iint_{(D)}\left\{\frac{1}{2}(R_1'^2+R_2'^2)\right\}dxdy+$$

$$+\int_{\gamma_1}\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n}(\log r)R'ds,$$

где допустимыми являются функции, удовлетворяющие условиям (3), (4) и соответственно (3′), (4′).

Наряду с этим рассматривается задача о максимуме функционалов

$$K_1(u'')=-\frac{1}{2}\iint_{(D)}(u_1''^2+u_2''^2)\,dxdy+$$

$$+\int_{\gamma_2}k\left(u_1''\frac{\partial x}{\partial n}+u_2''\frac{\partial y}{\partial n}\right)ds,$$

$$K_2(R'')=-\frac{1}{2}\iint_{(D)}(R_1''^2+R_2''^2)\,dxdy+$$

$$+\int_{\gamma_2}-\frac{1}{2\pi}\log r\left(R_1''\frac{\partial x}{\partial n}+R_2''\frac{\partial y}{\partial n}\right)ds,$$

где допустимыми являются функции, удовлетворяющие условиям (1), (2) и соответственно (1′), (2′).

Доказывается, что $K_1[u'']$ достигает максимального значения, равного минимуму функционала $J_1[u']$, для одних и тех же функций u, u_1, u_2.

Используя этот результат, автор показывает, что для «наилучшего» приближения

$$u^* = \sigma + b' + b''$$

имеет место оценка

$$|u - \sigma - b' - b''| \leqslant 2\sqrt{ac} - |b' - b''|,$$

где

$$a = J_1(u') - K_1(u''), \qquad c = J_2(R') - K_2(R'');$$

$$b' = \frac{1}{2}\left\{\iint\limits_{(D)} (u_1'R_1' + u_2'R_2')\,dxdy - \iint\limits_{(D)} fR'dxdy + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\gamma_1} \left(gR' - \frac{1}{2\pi} u' \frac{\partial}{\partial n}(\log r)\right) ds\right\};$$

$$b'' = -\frac{1}{2}\left\{\iint\limits_{(D)} (u_1''R_1'' + u_2''R_2'')\,dxdy - \right.$$

$$- \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_2} \log r \left(u_1'' \frac{\partial x}{\partial n} + u_2'' \frac{\partial y}{\partial n}\right) ds +$$

$$\left. + \int\limits_{\gamma_2} k\left(R_1'' \frac{\partial x}{\partial n} + R_2'' \frac{\partial y}{\partial n}\right) ds\right\}.$$

В списке цитированных работ автор не указывает статей М. Г. Слободянского (Прикл. матем. и механика, 1951, 15, № 2 и др.), относящихся к этому же вопросу. *В. П. Ильин*

5585. **Парадокс, относящийся к уравнению Пуассона. Бандьопадхьяй** (A paradox related to Poisson's equation. Bandyopadhyay G.), Current Sci., 1953, 22, № 11, 328—329 (англ.)

Рассматривается пространство, целиком заполненное притягивающими массами постоянной плотности. Гравитационное поле отсутствует, так как притягивающее действие какого-либо элемента уравновешивается притягивающим действием симметричного элемента. Но тогда потенциал притяжения $\varphi = \text{const}$, и из уравнения Пуассона $\nabla^2\varphi = 4\pi\rho$ следует, что плотность $\rho \equiv 0$.

По мнению автора, объяснение парадокса следует искать в смысле утверждения «все пространство заполнено веществом». Можно, например, это утверждение понимать следующим образом: тело больших размеров (например, сфера большого радиуса R) заполнено веществом с постоянной плотностью ρ, а затем $R \to \infty$. При таком толковании соображения симметрии отпадают, а с ними отпадает и парадокс. Такое объяснение автор считает, однако, неудовлетворительным, так как утверждение «все пространство заполнено веществом постоянной плотности ρ» означает, что $\rho(x, y, z) = \text{const}$ для всех x, y, z, а вовсе не то, что

$$\rho(x, y, z) = \begin{cases} \text{const}, & x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2, \\ 0 & x^2 + y^2 + z^2 > R^2 \end{cases}$$

и затем $R \to \infty$.

Автор пишет, что он не нашел удовлетворительного разрешения парадокса.

Примечание референта. Решение парадокса тривиально. Если все пространство заполнено однородными притягивающими массами, то сила притяжения, компоненты которой выражаются расходящимися интегралами вида

$$\rho \iiint \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_0} dx\,dy\,dz, \quad r^2 = (x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2,$$

оказывается совершенно неопределенной, и невозможно говорить о потенциале притяжения. Соображения симметрии, приводимые автором, означают, что упомянутый выше интеграл вычисляется как его главное значение:

$$\iiint \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_0} dx\,dy\,dz = \lim_{R\to\infty} \iiint\limits_{r<R} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_0} dx\,dy\,dz = 0,$$

но такое понимание интеграла никак не приводит к уравнению Пуассона для потенциала. *С. Г. Михлин*

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

5586. **Определение амплитуд поперечных колебаний, вызываемых продольными силами. Болотин В. В.**, Сб. «Поперечные колебания и критические скорости», Изд. АН СССР, М., 1953, № 2, 45—64

Задача об определении амплитуд установившихся поперечных колебаний стержня при параметрическом резонансе сводится к исследованию нелинейного дифференциального уравнения (Болотин В. В., Сб. «Поперечные колебания и критические скорости», Изд. АН СССР, 1951, № 1)

$$\ddot{T} + 2\varepsilon\dot{T} + \Omega^2(1 - 2\mu\cos\theta t)\,T + \psi(T, \dot{T}, \ddot{T}) = 0, \quad (1)$$

где $T(t)$ — коэффициент разложения кривой динамических колебаний в ряд по формам собственных колебаний, ε — коэффициент затухания, Ω — частота собственных колебаний стержня (определенная при учете постоянной составляющей продольной силы), μ — коэффициент пульсации, $\psi(T, \dot{T}, \ddot{T})$ — нелинейная функция, характеризующая нелинейную упругость, затухание и силы инерции.

При $\psi(T, \dot{T}, \ddot{T}) = 2\varkappa T(\dot{T}^2 + T\ddot{T})$ и вблизи соотношения частот $\theta \approx \Omega$ для разыскания амплитуд установившихся колебаний решение уравнения (1) ищется в форме

$$T(t) = b_0 + a_2 \sin\theta t + b_2 \cos\theta t. \quad (2)$$

Для нахождения постоянных b_0, a_2, b_2 методом Галеркина выводится нелинейная система алгебраических уравнений. При отсутствии затухания эта система упрощается и получаются простые формулы, определяющие границы зоны неустойчивости и амплитуду колебаний $A = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$:

$$\theta_{\text{кр}} = \Omega\sqrt{1 - 2\mu^2}, \quad \theta_{\text{кр}} = \Omega, \quad A = \frac{\sqrt{1 - n^2}}{n\sqrt{\varkappa}} \left(n = \frac{\theta}{\Omega}\right).$$

Дается также исследование задачи при наличии затухания (§ 4).

При учете начального искривления стержня уравнение (1) становится неоднородным с синусоидальной правой частью (§ 5). Его решение также

ищется приближенно в форме (2). Показано, что имеется три случая:

(а) Коэффициент пульсации меньше критического значения, при котором еще возможно возбуждение колебаний (§ 6). Линейное приближение достаточно.

(б) Коэффициент пульсации существенно больше ($\mu > 2\mu_{кр}$) критического значения — величины установившихся амплитуд в основном определяются влиянием нелинейных членов (§ 7).

(в) Коэффициент пульсации лежит в пределах $\mu_{кр} \leqslant \mu \leqslant 2\mu_{кр}$ — необходимо одновременно учитывать затухание и нелинейные факторы.

Для случаев (а) и (б) даны окончательные формулы, определяющие амплитуды колебаний, и построены резонансные кривые. Показано существование затягивания. *Г. Ю. Джанелидзе*

5587. О параметрическом возбуждении поперечных колебаний. Болотин В. В. Сб., «Поперечные колебания и критические скорости», Изд. АН СССР, М., 1953, № 2, 5—44

Задача о динамической устойчивости поперечных колебаний прямолинейного стержня, сжатого периодически изменяющейся со временем продольной нагрузкой $N(x, t)$, распределенной по длине стержня по произвольному закону, сводится к интегро-дифференциальному уравнению

$$y(x, t) + \int_0^l m(\xi) K(x, \xi) \frac{\partial^2 y(\xi, t)}{\partial t^2} d\xi - \int_0^l N(\xi, t) \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi} \frac{\partial y(\xi, t)}{\partial \xi} d\xi = 0,$$

где $y(x, t)$ — прогиб, $K(x, \xi)$ — функция влияния, $m(\xi)$ — линейная плотность.

Решение уравнения ищется в форме ряда по собственным функциям $\varphi_k(x)$ соответствующей задачи о свободных колебаниях (или функциям $\psi_k(x)$, отвечающим задаче о статической устойчивости). В обоих случаях для определения коэффициентов рядов $T_k(t)$ получается система обыкновенных дифференциальных уравнений, конкретизируемая для

$$N(x, t) = [\alpha + \beta \cos \theta t] N_0(x).$$

Матричная запись этих уравнений позволяет выявить особый случай распадения системы на ряд отдельных уравнений (случай Б. З. Брачковского, Прикл. матем. и механика, 1942, 6, № 1). Дифференциальные уравнения особого случая исследуются методом Хилла.

Приводятся известные результаты, относящиеся к системам линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

В общем случае система записывается в матричной форме

$$\mathbf{C}\ddot{\mathbf{T}} + (\mathbf{E} - \alpha\mathbf{A} - \beta \cos \theta t\, \mathbf{B})\, \mathbf{T} = 0$$

и решение, имеющее период $4\pi/\theta$, ищется в виде ряда

$$\mathbf{T}(t) = \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} \left(\mathbf{a}_k \sin \frac{k\theta t}{2} + \mathbf{b}_k \cos \frac{k\theta t}{2} \right),$$

где $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ — искомые векторы.

Выводится условие существования искомого периодического решения в виде диагонального матричного определителя. Это условие отличается от уравнения, соответствующего особому случаю, заменой собственных значений матриц самими матрицами. Аналогично выводятся условия существования периодических решений с периодом $2\pi/\theta$.

Устанавливается связь задачи о динамической устойчивости с задачей о собственных колебаниях системы, загруженной соответствующей постоянной параметрической нагрузкой. Особо исследуется случай кратных корней характеристического уравнения. Показано, что наличие двух пар кратных корней связано с комбинационным резонансом двух форм колебаний. В качестве примера рассматривается задача о динамической устойчивости плоской формы изгиба (случай чистого изгиба) и даются границы первых трех областей неустойчивости. *Г. Ю. Джанелидзе*

5588. Автоколебательные системы с сильно выраженной нелинейностью. Савинов Г. В., Вестн. Моск. ун-та, сер. физ.-матем. и естеств. н., 1953, № 6, 77—83

Методом малого параметра (Пуанкаре) определяются периодические режимы и условия их устойчивости, когда процесс описывается уравнением

$$\ddot{x} + \mu f(x, \dot{x}, \mu) + g(x) = 0,$$

где μ — малый параметр; f и g — аналитические функции. Приложение метода Пуанкаре к системам, близким к нелинейным, имеющим порождающее периодическое решение, имеется, например, у А. А. Андронова, С. Э. Хайкина (Теория колебаний, ОНТИ, 1937) и И. Г. Малкина (Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, 1949). *М. А. Айзерман*

5589. Способ прямой линеаризации в нелинейных задачах крутильных колебаний. Пановко Я. Г., Уч. зап. Латв. ун-та, 1953, **4**, 73—90

В дифференциальном уравнении свободных колебаний

$$\ddot{x} + f(x) = 0$$

нелинейная функция $f(x)$ заменяется линейным приближением

$$\bar{f}(x) = k(x + \Delta), \quad \Delta = \frac{1}{2}(x_{max} + x_{min}),$$

где коэффициент k определяется из выражения

$$k = 2.5A^{-3} \int_{-A}^{A} f(\alpha - \Delta)\, \alpha^3\, d\alpha, \quad A = \frac{1}{2}(x_{max} - x_{min}),$$

получаемого из условия минимума интеграла

$$I(k) = \int_{x_{min}}^{x_{max}} [f(x) - \bar{f}(x)]^2 (x + \Delta)^2 dx,$$

выражающего интегральное квадратичное отклонение функции $f(x)$ от $\bar{f}(x)$, вычисляемое при весе $(x + \Delta)^2$. Связь между x_{max} и x_{min} дается соотношением

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(x)\,dx = 0.$$

Приведено несколько примеров, подтверждающих достаточно высокую точность результатов расчета зависимости частоты от амплитуды колебания, достигаемую при применении метода. Предлагается при вычислении вынужденных колебаний в нелинейной системе, т. е. при решении уравнения

$$\ddot{x} + f(x) = F(t),$$

производить ту же замену $f(x)$ на $\overline{f}(x)$ и далее рассматривать линейную задачу. *А. И. Лурье*

5590. **Ангармонические колебания частной модели. Кушваха** (Anharmonic oscillations of a particular model. Kushwaha R. S.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1953, 45, № 2, 75—81 (англ.)

Уравнение пульсаций для малых адиабатических радиальных колебаний с конечной амплитудой

$$\rho_0 r_0 \ddot{\eta} = -(1+\eta)^2 \frac{\partial}{\partial r_0}\left[P_0(1+\eta)^{-2\gamma} \times \right.$$
$$\left. \times (1+\eta+r_0\eta')^{-\gamma}\right] - g_0\rho_0(1+\eta)^{-2} \qquad (1)$$

(P_0, ρ_0 и r_0 — равновесные значения давления, плотности и расстояния от центра, γ — отношение теплоемкостей, η — относительное смещение $\delta r / r_0$, штрих означает дифференцирование по r, точка — дифференцирование по времени) решается при помощи разложения в ряды Фурье для звездной модели, в которой треть массы сосредоточена в центре, а остальные две трети распределены по звезде с постоянной плотностью. Полагая

$$\eta = \sum_k \eta_k(r_0)\, q_k(t), \qquad (2)$$

где $\eta_k(r_0)$ — решения уравнения (1) для бесконечно малых колебаний, и нормализуя η_k к единице на поверхности звезды (это дает относительное смещение на поверхности $\eta_R = \sum q_k(t)$), автор получает систему дифференциальных уравнений для q_k (членами, содержащими q_k в степени большей двух, он пренебрегает) вида

$$\ddot{q}_k + \beta_k q_k = \frac{\gamma}{\sigma_1^2 I_k}\left[\sum_i D_{iik} q_i^2 + 2\sum_{ij} D_{ijk} q_i q_j\right].$$

Уравнения используются для определения q_1, q_2 и η_R при различных значениях γ. Окончательные результаты сведены в таблицу. *Г. А. Лейкин*

5591. **Приближенный метод исследования квазигармонических колебаний. Леонов М. Я.**, Науч. зап. Ин-та машиноведения и автоматики АН УССР, 1953, 2, № 1, 5—8

Дается приближенный метод интегрирования уравнения

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = 1 + \gamma(\theta)\sin 2\varphi \qquad (1)$$

($\gamma = \gamma(\theta)$ — непрерывная функция). Через частное решение этого уравнения, как показано автором (Докл. АН УССР, 1948, № 3), при помощи квадратур может быть выражен общий интеграл уравнения 2-го порядка

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + 2\gamma(\theta)\frac{dx}{d\theta} + x = 0, \qquad (2)$$

где $\frac{x}{x'} = \operatorname{tg}\varphi$. Если известно несколько частных решений уравнения (1), то общий интеграл уравнения (2) может быть построен без выполнения квадратур. Метод носит формальный характер, так как отсутствует оценка погрешности приближенного решения и неясна область применимости. Имеются опечатки, например, $\frac{1}{4}\cdot\frac{d}{d\theta}$ вместо $\frac{1}{4DG}\cdot\frac{d}{d\theta}(DG)$ (формула 1,5); $\cos^2\varphi^*$ вместо $\cos 2\varphi^*$ (формула 2,6). *Б. П. Демидович*

5592. **Об асинхронном возбуждении. Минорский** (Sur l'excitation asynchrone. Minorsky Nicolas), C. r. Acad. sci., 1953, 237, № 17, 964—966 (франц.)

Рассматривается явление асинхронного возбуждения и на примере колебательной системы, описываемой уравнением

$$\ddot{x} - (a + cx^2 - ex^4)\dot{x} + x = \gamma\sin\omega t,$$

где a, c, e, γ — положительные постоянные; показывается, что это явление вызывается изменением топологической конфигурации интегральных кривых при переходе от случая $\gamma = 0$ к случаю $\gamma \neq 0$. *Ю. А. Митропольский*

5593. **Расчет регуляторов по заданным предельным значениям ошибки регулирования. Штрёле** (Berechnung von Reglern bei vorgeschriebenen Regelfehlerschranken. Ströle Dieter), Arch. elektr. Übertrag., 1953, 7, № 1, 37—46 (нем.)

Кратко излагается постановка задачи об определении параметров регулятора по заданному наибольшему отклонению регулируемой величины в процессе регулирования в случае, когда процесс регулирования описывается обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями с действительными коэффициентами. Предлагается выбирать параметры регулятора, исходя из подсчитанных в работе таблиц, устанавливающих связь между протеканием процесса регулирования во времени, с одной стороны, и протеканием годографа векторфункции, получаемой заменой p на $i\omega$ в характеристическом уравнении системы — с другой.

Если решение уравнения, описывающего процесс регулирования, $h(t) = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu e^{p_\nu t}$, где p_ν — корни характеристического уравнения $H(p) \equiv p^n + y_{n-1}p^{n-1} + \ldots + y_0 = 0$, то в устойчивом случае

$$C = \max|h(t)| \leqslant \sum_{\nu=1}^{n}|A_\nu|.$$

Пусть $H(i\omega) = u(\omega^2) + i\omega v(\omega^2)$ и нули функций u и v соответственно равны r_j и q_j. В устойчивом случае значения r_j и q_j чередуются. Предполагается,

что $r_1 : q_1 : r_2 : q_2 \ldots = 1 : 2^k : 3^k : 4^k \ldots$ Определяются и сводятся в таблицы функции $\sum |A_\nu| = f_1(r_1)$ и $\sum |A_\nu| = f_2(y_0)$ при разных n и k. Найдены также функции $\int_0^\infty [h(t) - h(\infty)]^2\, dt = f_3(r_1,\ y_{\nu-1})$ и $\int_0^\infty [h(t) - h(\infty)]^2\, dt = f_4(y_0,\ y_{n-1})$, так как интегралы указанного вида также используются в теории регулирования для оценок качества регулирования процесса. Сведены в таблицу значения $|\mathrm{Re}\,(p_\nu)|_{\min}$, подсчитанные в качестве примера для $\nu = 4$ при различных k и $y_3 / y_0^{1/4}$.

Рекомендуется при выборе параметров регулятора, зная n, задаваться k, при котором получается по таблицам приемлемое C, и находить затем по таблицам $y_3 / y_0^{1/4}$. Параметры регулятора выбираются так, чтобы реализовывались эти значения k и $y_3 / y_0^{1/4}$.

М. А. Айзерман

5594. Расчет регуляторов при заданных границах ошибки регулирования. Штрёле (Berechnung von Reglern bei vorgeschriebenen Regelfehlerschranken. Ströle Dieter), Arch. elektr. Übertrag., 1953, 7, № 2, 107—116 (нем.)

Окончание работы, опубликованной автором ранее под тем же названием (см. реф. 5593). Таблицы, построенные в первой части работы, дополняются общими сведениями о вычислении расстояния от мнимой оси в плоскости корней до ближайшего слева аффикса корня характеристического полинома (степень устойчивости). Описывается методика расчета системы автоматического регулирования, использующая указанные таблицы и понятие о степени устойчивости. Методика демонстрируется на примерах расчета системы регулирования в установке для кондиционирования воздуха и регулятора напряжения генератора переменного тока.

М. А. Айзерман

5595. Монотонный переходный процесс. Катеридж (Monotonic transient response. Cutteridge O. P. D.), Proc. Instn Electr. Engrs, 1954, 101, ч. 4, № 6, 46—54 (англ.)

Рассматриваются динамические системы, описываемые уравнением $D(p)X = K(p)\,1$, где $p = \frac{d}{dt}$, $D(p)$ и $K(p)$ — полиномы с постоянными и действительными коэффициентами, 1 — единичная функция Хевисайда. Требуется найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы интегралом уравнения была монотонная функция при предположении, что степень D не выше степени K. Указанная задача решается для случая, когда степень D равна трем.

В заключение автор высказывает соображения об использовании результата работы для нахождения достаточных условий монотонности интеграла в некоторых более общих случаях. Автор не цитирует обширной литературы, посвященной той же проблеме (см., например, Wischnegradski I., Über directwirkende Regulatoren, Bd. XXIII, Der Civilingenieur, 1877, § 14, 116—119; Блох З. Ш., Динамика линейных систем автоматического регулирования, Гостехиздат, М.—Л., 1952, гл. XIII).

М. А. Айзерман

5596. Об аналитической проблеме устойчивости регулирования. Герарделли (Sul problema analitico della stabilità della regolazione. Gherardelli Luigi), Energia elettr., 1953, 30, № 1, 1—5 (итал.)

Предлагается при проведении вычислений, связанных с проверкой устойчивости систем автоматического регулирования, следовать алгоритму, который применялся Раусом при выводе его условий устойчивости. Этот прием заключается в вычислении при помощи рядов Штурма общего наибольшего делителя двух полиномов, один из которых содержит члены характеристического уравнения, имеющие четные степени, а другой — нечетные.

И. М. Смирнова

5597. Определение функции расстояния фазового пространства и нелинейные следящие системы. Ган Цзи-лун, Фетт (Metrization of phase space and nonlinear servo systems. Kang Chi Lung, Fett Gilbert H.), J. Appl. Phys. (N. Y.), 1953, 24, № 1, 38—41 (англ.)

Рассматривается следящая система или система автоматического регулирования, описываемая уравнением

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = G(x^{(n-1)}, \ldots, \dot{x}, x, t), \qquad (1)$$

где x — отклонение регулируемой величины от заданного значения (в следящих системах — ошибка слежения), a_j — фиксированные числа, G — заданная нелинейная функция, удовлетворяющая условиям существования и единственности решения уравнения (1).

В устойчивом случае предлагается процесс считать хорошим, если изображающая точка большую часть времени расположена вблизи от начала координат фазового пространства (термины «большая часть времени» и «расположена вблизи» не уточняются).

Для установления меры расстояния изображающей точки от начала координат правая часть временно заменяется функцией времени $F(t)$, и заменой $x = e_1$, $\dot{e}_1 = e_2, \ldots, \dot{e}_{n-1} = e_n$ уравнение (1) сводится к

$$\frac{de}{dt} = Be + \boldsymbol{F}(t), \qquad (2)$$

где $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, $\boldsymbol{F}(t) = (0, \ldots, 0, F(t))$, а B — постоянная матрица, составленная из коэффициентов уравнения.

Матрица Вандермонда

$$P = \begin{Vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{Vmatrix},$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — корни характеристического уравнения системы (2) (предполагается отсутствие кратных корней) удовлетворяет тогда соотношению

$$P^{-1} B P = R,$$

где R — диагональная матрица с диагональными элементами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Преобразование $e = Pz$ сводит (2) к канонической форме

$$\frac{dz}{dt} = Rz + P^{-1}F(t). \qquad (3)$$

В качестве меры расстояния изображающей точки от начала координат предлагается функция Ляпунова

$$D(z, 0) = (z)^T Sz = 2\sum_{r=1}^{r} \lambda_{2r-1}\lambda_{2r} z_{2r-1} z_{2r} + \sum_{s=1}^{n-2r} \gamma_{2r+s}^2 z_{2r+s}^2,$$

где обозначение λ сохранено для комплексных корней, γ — действительные корни, а S — матрица

$$S = \begin{Vmatrix} 0 & \lambda_1\lambda_2 & & & & & & & \\ \lambda_1\lambda_2 & 0 & & & & & & & \\ & & 0 & \lambda_3\lambda_4 & & & & 0 & \\ & & \lambda_3\lambda_4 & 0 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 0 & \lambda_{2r-1}\lambda_{2r} & & \\ & & & & & \lambda_{2r-1}\lambda_{2r} & 0 & & \\ & 0 & & & & & & \gamma_{2r+1} & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \gamma_n \end{Vmatrix}$$

Если матрица $(P^{-1})^T S P^{-1}$ положительна (условие заведомо выполняется, когда все корни характеристического уравнения исходной системы (1) действительные), поверхности $D = \text{const}$ — эллипсоиды. Отмечается, что введенной так норме может быть дана простая механическая интерпретация.

При учете уравнения (3) производная $\dot{D}$ равна:

$$\dot{D} = \dot{D}_0 + 2KF(t),$$

где $\dot{D}_0$ — совокупность членов, входящих в $\dot{D}$ и не содержащих $F(t)$, а K — линейная функция координат.

В указанном выше смысле процесс за счет $F(t) \not\equiv 0$ улучшается, когда всюду (авторы неточно пишут «в большей части точек») $\dot{D} < \dot{D}_0$, причем в устойчивом случае $\dot{D}_0$ определенно отрицательная функция.

Предлагается использовать указанные рассуждения, учитывая, что $F(t)$ определяется функцией G, для оценки влияния различных нелинейностей на протекание процесса регулирования.

Полученные результаты иллюстрируются на примере следящей системы с дополнительной форсировкой. *М. А. Айзерман*

5598. Вычисление интегральных критериев оптимальности процессов регулирования. Крыжановский (Обчислення інтегральних критеріїв оптимальності процесів регулювання. Крижановський О. М.), Доповіді АН УРСР, 1953, № 3, 183—190 (укр.)

В работе приведены явные значения квадратичных критериев оптимальности переходных процессов, описываемых дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами до 6-го порядка включительно с заданными начальными условиями. Показана также возможность вычисления полученных критериев при операторной форме записи уравнений с заданной правой частью в виде полинома от p.

Как правило, для определения оптимальных значений параметров рекомендуется предварительно вычислять значение критериев при заданных числовых значениях параметров и остановиться на тех из них, которые дают минимальное значение критерия. В некоторых случаях можно получить аналитически оптимальные значения параметров, воспользовавшись известными правилами отыскания минимума функции I_k. *Резюме автора*

5599. Определение орбиты как краевая задача. IV. Буцериус (Bahnbestimmung als Randwertproblem. IV. Bucerius H.), Astron. Nachr., 1953, 281, № 3, 97—106 (нем.)

Статья является завершением работы автора, печатавшейся в предыдущих томах (Astron. Nachr., 278, 193, 204; 280, 73). В ней освещается с совершенно новой точки зрения процесс Лагранжа — Гаусса, применяемый в задаче двух тел при определении орбиты по трем наблюдениям. В частности, рассматривается вопрос о сходимости этого процесса и, в связи с ним, вопрос о возможной неоднозначности определения орбиты. Работа дополняет и развивает целый ряд исследований других авторов (Encke, Charlier. Herglotz, Cohn и др.), посвященных той же теме.

Прежде всего автор рассматривает задачу определения орбиты по двум гелиоцентрическим положениям, трактуя ее как краевую задачу математической физики. Дифференциальные уравнения задачи в векторной форме имеют вид

$$\boldsymbol{r}(t) = -k^2(1+m)\frac{\boldsymbol{r}(t)}{|\boldsymbol{r}(t)|^3}.$$

Вводя вектор $\boldsymbol{r}_0(t)$, удовлетворяющий уравнению равномерного прямолинейного движения

$$\boldsymbol{r}_0(t) = 0,$$

автор представляет его в виде

$$\boldsymbol{r}_0(t) = \frac{t_3 - t}{t_3 - t_1}\boldsymbol{r}_1 + \frac{t - t_1}{t_3 - t_1}\boldsymbol{r}_3,$$

где $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_3$ определяют два данных гелиоцентрических положения в моменты t_1 и t_3. Таким образом, вектор $\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}_0(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению 2-го порядка с нулевыми граничными условиями, которые должны вполне определить решение. Затем автор строит функцию Грина

$$G(t, t') = \frac{(t - t_1)(t_3 - t')}{t_3 - t_1} \quad (t \leqslant t'),$$

с помощью которой задача сводится к интегральному уравнению

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0(t) + k^2(1+m)\int_{t_1}^{t_3} G(t, t')\frac{\boldsymbol{r}(t')}{|\boldsymbol{r}(t')|^3}\,dt'. \qquad (1)$$

Используя компланарность векторов $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, т. е. соотношение

$$\overline{\boldsymbol{r}}(t) = n_1(t)\,\boldsymbol{r}_1 + n_3(t)\,\boldsymbol{r}_3,$$

получаем скалярную систему двух интегральных уравнений

$$n_1(t) = \frac{t_3 - t}{t_3 - t_1} + k^2(1+m)\int_{t_1}^{t_3} \frac{G(t,t')\,n_1(t')\,dt'}{|\,n_1(t')\boldsymbol{r}_1 + n_3(t')\,\boldsymbol{r}_3\,|^3},$$

$$n_3(t) = \frac{t - t_1}{t_3 - t_1} + k^2(1+m)\int_{t_1}^{t_3} \frac{G(t,t')\,n_3(t')\,dt'}{|\,n_1(t')\boldsymbol{r}_1 + n_3(t')\,\boldsymbol{r}_3\,|^3}.$$

Автор предлагает метод последовательных приближений для решения этой системы, состоящий в последовательном (приближенном) применении теоремы о среднем к интегралам, стоящим справа. При этом условия сходимости получаются из рассмотрения мажорантного уравнения

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0(t) + \frac{k^2(1+m)}{h^3}\int_{t_1}^{t_3} G(t,t')\,\boldsymbol{r}(t')\,dt',$$

где $h = \min \boldsymbol{r}(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_3)$ есть перпендикуляр, опущенный из начала координат на хорду $\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_3$. Решая это линейное неоднородное интегральное уравнение методом Нёймана разложения в ряд по степеням параметра $\lambda = \dfrac{k^2(1+m)}{h^3}(t_3 - t_1)^2$, автор получает нижнюю границу радиуса сходимости этого ряда

$$\lambda \leqslant 3\sqrt{10}.$$

Поэтому в такой постановке при условии $\lambda \leqslant 3\sqrt{10}$ задача имеет единственное решение.

Однако при определении орбиты по трем наблюдениям сами граничные значения $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_3$ нам неизвестны и должны быть определены из некоторой системы уравнений. Как известно из теории краевых задач математической физики, так называемые собственные значения (роль которых в данном случае играет λ) зависят от граничных условий. Поэтому автор связывает эту астрономическую задачу с проблемой одновременного разыскания собственных значений λ соответствующего линейного однородного интегрального уравнения и решения неоднородного уравнения при этих значениях λ. *Г. А. Мерман*

5600. О решении дифференциального уравнения, связанного с задачей о конвенции тепла в ламинарном потоке через трубу. Абрамовиц (On the solution of the differential equation occurring in the problem of heat convection in laminar flow through a tube. Abramowitz Milton), J. Math. and Phys., 1953, **32**, № 2—3, 184—187 (англ.)

Решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dy}{dr} + \beta^2(1 - r^2)\,y = 0 \qquad (1)$$

с краевыми условиями

$$y(0) = 1,\ y(1) = 0$$

ищется в виде ряда по функциям Бесселя

$$y(r,\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\beta)\,\Omega_n(\beta r).$$

где

$$\Omega_n(\beta r) = (\beta r)^n J_n(\beta r).$$

Задача сводится к нахождению собственных значений β_s, для которых $y(1,\beta) = 0$.

В силу уравнения (1) и известных соотношений для бесселевых функций получается

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(\beta)\,\{2n\beta^2\,\Omega_{n-1} - (2n+2)\,\Omega_{n+1} + \Omega_{n+2}\} = 0,$$

откуда выводятся рекуррентные соотношения для $A_n(\beta)$ $(A_0 = 1)$. Для определения собственных значений β_s ищутся нули функции

$$y(r,\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\beta)\,(\beta r)^n J_n(\beta r) \text{ для } r = 1.$$

Для вычисления β_s предлагается вычислить $y(1,\beta)$ для ряда значений β в окрестности каждого предполагаемого собственного значения β_s, после чего нули $y(1,\beta)$ находятся интерполяцией (с использованием таблиц бесселевых функций). Приведены численная иллюстрация метода и сравнение полученных собственных значений с асимптотическим выражением для больших β_s

$$\frac{1}{2}\beta_s \approx v + 0{,}031580\,v^{-4/3} - 0{,}000904\,v^{-8/3},$$

$v = 2s + 1 + {}^1\!/_3$, найденным ранее (Lauwerier H. A., Appl. Scient. Res., 1951, **A2**, 184—204).

Л. И. Камынин

5601. Одна теорема динамики и ее применение к движению электризованных частиц в присутствии диполя. Коломбо (Un teorema di dinamica ed una sua applicazione al moto di un corpuscolo elettrizzato in presenza di un dipolo.Colombo G.), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1953, **22**, № 2, 207—222 (итал.)

Рассматривается консервативная динамическая система с двумя степенями свободы, для которой интеграл энергии имеет вид

$$p_1^2 + p_2^2 - 2U(q_1, q_2) = 2h.$$

Предполагая, что:

a) q_1, q_2, p_2 — ортогональные координаты в пространстве S, R—ограниченная область $2(h_0+U)$— $-p_2^2 > 0$ с выпуклой поверхностью Σ, определяемой уравнением $2[h_0 + U(q_1, q_2)] - p_2^2 = 0$, C — пересечение поверхности Σ плоскостью (q_1, q_2), M^* — совокупность движений M, динамические траектории которых, расположенные на плоскости (q_1, q_2), принадлежат некоторой конечной области Ω, ограниченной C.

b) Существует значение q_1^0 внутри интервала

оси q_1, на который проектируется ортогонально C, такое, что $U'_{q_1}(q_1^0, q_2) \equiv 0$. Тогда среди движений M имеется периодическое движение p^* с периодом T, в соответствии с которым $q_1 = q_1^0$.

c) Выполняется неравенство $\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}(q_1^0, q_2) < 0$ и характеристические показатели $(\pm i\mu)$ уравнения в вариациях относительно p^* не малы, чисто мнимые и таковы, что числа $\frac{\pi}{\mu T}$ не рациональны.

При этих предположениях доказывается теорема, утверждающая, что рассматриваемая динамическая система допускает по крайней мере одно периодическое решение, в соответствии с которым q_1 принимает любое значение, заключенное между наибольшим и наименьшим, только два раза за период.

Изложенная теорема применяется к проблеме о движении электризованной частицы в присутствии диполя. Эта проблема приводится к изучению относительного движения частицы на плоскости, проходящей через ось диполя. Доказывается, что при подходящих начальных условиях возможны чисто периодические движения, причем среди них имеется по крайней мере одно, орбита которого такова, что ортогональные по отношению к оси диполя плоскости имеют две точки, общие с ней.

Ю. А. Митропольский

5602. Одномерные потоки большой скорости. Линии тока для течения газа через сопла с учетом действия сжимаемости и вязкости. Кестин, Зарембa (One-dimensional high-speed flows. Flow patterns derived for the flow of gases through nozzles, including compressibility and viscosity effects. Kestin J., Zaremba S. K.), Aircraft Engng, 1953, 25, № 292, 172—175, 179 (англ.)

Качественно исследуются частные случаи обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения 1-го порядка

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x,y)}{X(x,y)}, \\ &X(x,y) = (1-y)F(x), \\ &Y(x,y) = 4y\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}y\right)[\gamma y f - F'(x)], \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

описывающего одномерное установившееся движение идеального газа с постоянной теплоемкостью в прямой трубе переменного сечения с учетом трения на стенках трубы (здесь $y = M^2$; $D = F(x)$ — диаметр трубы; γ — отношение удельных теплоемкостей; f — коэффициент трения на стенке — полагается постоянным; x — координата, отсчитываемая вдоль оси трубы). Считается, что ударных волн в потоке нет.

Показывается, что для любой функции $F(x)$ при наличии трения ни одна особая точка не может быть центром. Для трубы постоянного сечения уравнение (1) особых точек не имеет.

Рассмотрены два случая течения через сопло, когда в расширяющейся части всюду $F''(x) > 0$ и когда $F''(x)$ обращается в нуль в одной точке. В первом случае может быть лишь одна особая точка — седло, как и при движении газа без трения. Во втором случае может появиться еще вторая особая точка — фокус, если во второй особой точке $(x_2^*, 1)$

$$F''(x_2^*) < -\frac{f^2\gamma^2(\gamma-1)}{2F(x_2^*)},$$

либо вырожденный узел, если

$$0 > F''(x_2^*) > -\frac{f^2\gamma^2(\gamma-1)}{2F(x_2^*)}.$$

Если $F''(x_2^*) = 0$, то обе особые точки сливаются. Указывается, что на практике более вероятно появление фокуса, однако если вторая особая точка — вырожденный узел, то возможен непрерывный переход от сверхзвуковой скорости к дозвуковой для чисел M на выходе, изменяющихся в некоторых пределах. Показано (в гидравлической постановке) существование во всех случаях областей, где действие трения превышает действие изменения площади поперечного сечения сопла, т. е. где с расширением сопла сверхзвуковой поток замедляется, а дозвуковой — ускоряется.

В. А. Прокофьев

5603. Напряжения в плоскости, ослабленной двумя неравными круговыми отверстиями. Подстригач (Напруження в площині, ослабленій двома нерівними круговими отворами. Подстригач Я. С.), Доповіді АН УРСР, 1953, № 6, 456—460 (укр.; резюме русск.)

Дано решение первой основной задачи плоской теории упругости для бесконечной плоскости с двумя круговыми отверстиями. Функция напряжений в биполярных координатах ищется в виде ряда с неизвестными коэффициентами. Для этих последних автор, исходя из граничных условий, получает бесконечную систему линейных алгебраических уравнений и затем находит ее решение. Сходимость полученного ряда не исследуется.

В качестве численных примеров рассмотрены случаи, когда по контуру каждого из отверстий приложены равномерно распределенные давления p_1 и p_2 и, в частности, случай всестороннего растяжения плоскости, ослабленной двумя неравными круговыми отверстиями, контуры которых свободны от внешних усилий. *В. И. Моссаковский*

5604. К теории упругих волн, вызванных ударом. Ванек (A contribution to the theory of elastic waves produced by shock. Vaněk Jiří), Чехосл. физ. ж., 1953, 3, № 2, 97—119 (англ.; резюме русск.)

Исследуется распространение упругих волн в бесконечной однородной изотропной упругой среде, вызванных шаровым источником, при сфероидальном распределении напряжения на поверхности источника.

Рассматривается случай (из-за сложности вычислений, как замечает сам автор), когда азимутальная составляющая смещения равна нулю и смещения не зависят от азимутальной координаты. Методами операционного исчисления решение выписывается для произвольной возбуждающей функции.

Особо исследуется случай источника взрывного характера, когда возбуждающая функция

имеет вид $f(t) = \sigma t^{\nu} e^{-\alpha t}$. Здесь подробно рассмотрены волны порядка $n = 0$, $n = 1$. Несмотря на апериодичность рассматриваемой возбуждающей функции, решение в случае $n = 0$ является затухающей периодической волной, а в случае $n=1$ (несмотря на расходимость вынужденных волн первого рода) результирующая радиальная и тангенциальная составляющие смещения остаются ограниченными. Показывается, что амплитуда волны (первый максимум смещения) в некоторой близости от источника убывает как $\frac{1}{r^k}$, где $k > 1$, r — расстояние от источника. Амплитуда волны также зависит от параметров возбуждающей функции. *С. А. Терсенов*

5605. К теории упругих волн, образующихся при взрыве. Ванек (K theorii elastických vln vytvořených nárazem. Vaněk Jiří), Časop. pěstov. fys., 1953, **3**, № 2, 93—112 (чеш.)

Изучается распространение в неограниченном однородном изотропном идеально упругом пространстве волн, вызванных шаровым источником взрывного характера. В общей постановке задача состоит в определении составляющих $u_i(r, \Theta, \varphi, t)$, $i = 1, 2, 3$, вектора перемещения вне сферы. Однако вследствие сложности соответствующей смешанной задачи автор ограничивается рассмотрением случая двух пространственных координат, полагая $\Theta = \text{const}$.

Определив функции Θ и ω равенствами

$$\Theta = \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{2u_1}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_2}{\partial \varphi} + \frac{u_2}{r}\operatorname{ctg}\varphi,$$

$$2\omega = \frac{\partial u_2}{\partial r} + \frac{u_2}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial \varphi},$$

автор решает следующую смешанную задачу. Вне сферы требуется найти решения уравнений

$$\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}\operatorname{ctg}\varphi, \tag{1}$$

$$\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\omega}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\operatorname{ctg}\varphi - \frac{\omega}{r^2}(1 + \operatorname{ctg}^2\varphi) \tag{1'}$$

при выполнении краевых условий на сфере:

$$p_{rr} = \left\{\lambda\Theta + 2\mu\frac{\partial u_1}{\partial r}\right\}_{r=a} = f(t)\,P_n(\cos\varphi),$$

$$p_{r\varphi} = \left\{\mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{u_2}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial\varphi}\right)\right\}_{r=a} = \chi(t)\frac{dP_n(\cos\varphi)}{d\varphi}$$

и начальных условий: при $t = 0$ $u_1 = \frac{\partial u_1}{\partial t} = u_2 = \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0$ вне этой сферы. Кроме этого, требуется регулярность u_1 и u_2 на бесконечности.

В этих формулах ρ означает плотность среды, λ и μ — постоянные Ламе, характеризующие ее упругость, $f(t)$ и $\chi(t)$ — наперед заданные функции, характеризующие напряжение, вызываемое источником на сфере $r = a$, p_{rr} определяет нормальную составляющую вектора напряжения, а $p_{r\varphi}$ — тангенциальную.

Метод решения основан на применении операционного исчисления. Сначала с помощью подстановок

$$\Theta = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{zt}}{z}\Phi(z)\,dz,\quad 2\omega = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{zt}}{z}\Psi(z)\,dz$$

уравнения (1) и (1') при учете начальных условий преобразуются в уравнения относительно Φ и Ψ. Для этих уравнений регулярные в бесконечности решения известны:

$$\Phi = A_n\, r^{-1/2}\, H^{(1)}_{n+1/2}(iz\beta_1 r)\, P_n(\cos\varphi)$$

$$\Psi = B_n\, r^{-1/2}\, H^{(1)}_{n+1/2}(iz\beta_2 r)\,\frac{dP_n(\cos\varphi)}{d\varphi},$$

где

$$\beta_1 = \left(\frac{\rho}{\lambda} + 2\mu\right)^{1/2},\qquad \beta_2 = \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{1/2},$$

A_n и B_n — неизвестные постоянные, которые определяются на основании краевых условий.

Во второй части работы автор применяет полученный результат к исследованию волн, образованных источником взрывного характера. В этом случае тангенциальная составляющая $p_{r\varphi}$ равна нулю и $f(t)$, называемая автором возмущающей функцией (functí budicí), определяется равенствами

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ \sigma t^{\nu} e^{-\alpha t} & \text{при } t > 0, \end{cases}$$

где α и σ — действительные положительные постоянные, ν — целое неотрицательное.

Основное внимание при этом уделяется «волнам порядка $n = 0$» и «волнам порядка $n = 1$», соответствующим порядку полинома Лежандра, участвующего в краевом условии.

Из окончательного результата для $n = 0$ следует, что при значительной отдаленности от источника достаточно учитывать только члены низшего порядка относительно $1/r$.

Влияние возмущающей функции на способ распространения упругих волн практически ограничено окрестностью источника $r < 3a$ для $n = 0$ и окрестностью $r < 19\,a$ для $n = 1$.

Зависимость амплитуды волн от расстояния и параметров функции $f(t)$ иллюстрируется рядом графических построений. При $r > 19\,a$ амплитуда волн порядка $n = 1$ оказывается в 1,9 раза меньше, чем амплитуда волн порядка $n = 0$. Волнам порядка $n = 2$, а также применению полученных результатов в сейсмологии автор предполагает посвятить специальную статью.

Вопросы единственности найденных решений в работе не затрагиваются. Автор указывает, что использованный метод был первоначально предложен Седзава (Sezawa K., Bull. Earthquake Res. Inst., 1927, 2, 13). Основные литературные ссылки делаются на обзорную работу Кавасуми (Kawasumi H., Publ. Bureau Central Seismolog. Inst. Intern. Traveaux scient., 1937, **A15**, 258) и новейшие работы японских сейсмологов. *Н. И. Симонов*

5606. Итерационное определение действия сосредоточенной нагрузки в применении к длинной прямоугольной пластинке. Грей (An iterative

solution to the effects of concentrated loads applied to long rectangular beams. Gray C. A. M.), Quart. Appl. Math., 1953, **11**, № 3, 263—271 (англ.)

Решается первая основная задача теории упругости для бесконечной прямолинейной полосы при сосредоточенных нагрузках. При помощи формул Г. В. Колосова — Н. И. Мусхелишвили, после конформного отображения полосы на единичный круг, получается бесконечная система линейных алгебраических уравнений для коэффициентов разложения в ряд функций, характеризующих напряженное состояние. Приводятся примеры приближенного решения указанной системы для нескольких случаев заданных сосредоточенных нагрузок. Решение этой задачи ранее было рассмотрено другим методом Файлоном (Filon L. N. G., Philos. Trans., Roy. Soc., 1903, **A201**, № 63), а также рядом авторов (С. П. Тимошенко, Теория упругости, ОНТИ, М. — Л., 1934, 59 — 60). *Г. Н. Положий*

5607. **Изгибание скрипичной струны. Келлер** (Bowing of violin strings. Keller Joseph B.), Communs Pure and Appl. Math., 1953, **6**, № 4, 483—495 (англ.)

Изучается колебание струны под действием смычка. Математически задача сводится к нахождению решения волнового уравнения с нелинейным краевым условием в одной точке при наличии обычных краевых и начальных условий. Если $u(x, t)$ — смещение струны в момент t в плоскости, содержащей струну и смычок, $b(t)$ — скорость смычка, а x_0 — точка контакта смычка и струны, то нелинейное краевое условие сводится к соотношению

$$f[u_t(x_0, t) - b(t)] = \\ = -T\cdot\{u_x(x_0+0, t) - u_x(x_0-0, t)\}, \qquad (1)$$

где $f[v]$, $b(t)$ — заданные функции, T — постоянная натяжения струны. Рассмотрены следующие случаи:

1) Колебания бесконечной струны:

а) ищется решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$, $x \neq x_0$, и краевому условию (1).

Решение имеет вид

$$u(x, t) = \begin{cases} \int\limits_0^{t-|x-x_0|/c} v(\tau)\,d\tau, & \text{при } t - \frac{|x-x_0|}{c} \geqslant 0 \\ 0, & \text{при } t - \frac{|x-x_0|}{c} < 0, \end{cases}$$

где $v(t)$ находится из уравнения $v(t) = F[v(t) - b(t)]$, $t \geqslant 0$, $F = \frac{c}{2T} f$. Условием скольжения струны вдоль смычка является $b/P > c\mu/2T$, где P — давление смычка, а μ — коэффициент статического трения. Из этого следует, что тембр звука зависит только от отношения величин b и P.

b) В случае ненулевых начальных данных решение имеет вид

$$u(x, t) = \begin{cases} g_1\left(t - \frac{x-x_0}{c}\right) + g_2\left(t + \frac{x-x_0}{c}\right) + \\ \quad + \int\limits_0^{t-\frac{|x-x_0|}{c}} v(\tau)\,d\tau, \\ \quad \text{при } t - \frac{|x-x_0|}{c} \geqslant 0 \\ g_1\left(t - \frac{x-x_0}{c}\right) + g_2\left(t + \frac{x-x_0}{c}\right); \\ \quad \text{при } t - \frac{|x-x_0|}{c} < 0, \end{cases}$$

где $v(t)$ удовлетворяет уравнению

$$F[v(t) + g_1(t) + g_2(t) - b(t)] = v(t).$$

2. Колебания полубесконечной струны. Помимо краевого условия (1), вводится условие закрепления $u(0, t) = 0$, $x_0 > 0$. Если $b(t) = \text{const}$, то решение имеет вид

$$u(x, t) = \int\limits_{t-\frac{|x+x_0|}{c}}^{t-\frac{|x-x_0|}{c}} v(\tau)\,d\tau,$$

где $v(\tau)$ — кусочно-постоянна

$$v(\tau) = \begin{cases} v_0 = 0, & \text{при } \tau < 0 \\ v_n, & \text{при } (n-1)\frac{2x_0}{c} < \tau < n\frac{2x_0}{c} \end{cases}$$

и удовлетворяет соотношению $F[v_n - v_{n-1} - b] = v_n$. Исследуется асимптотическое поведение $u_t(x_0, t)$ при различном виде функции $F[v]$.

3) Колебания конечной струны. Введены краевые условия

$$u\left(\frac{L}{2}, t\right) = u\left(-\frac{L}{2}, t\right) = 0.$$

Решение ищется в форме

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int\limits_0^{t-|x-2nL-x_0|/c} v(\tau)\,d\tau - \right. \\ \left. - \int\limits_0^{t-|x-(2n+1)L+x_0|/c} v(\tau)\,d\tau\right],$$

где $v(t)$ удовлетворяет соотношению $F[u_t(x_0, t) - b(t)] = v(t)$. Если $b(t) = \text{const}$, то $v(t)$ и $u_t(x_0, t)$ — кусочно-постоянные функции, имеющие разрывы в моменты $rT + s\tau$, где r, s — целые числа,

$$T = \frac{2L}{c}, \quad \tau = \frac{L - 2x_0}{c}.$$

Если τT^{-1} иррационально, то разрывы как угодно плотны при $t \to \infty$, τT^{-1} будет рационально лишь, если x_0 делит струну в рациональном отношении. Показывается, что скорость струны в каждой точке кусочно-постоянна. Периодическое решение для $u_t(x_0, t)$ $(t \geqslant 0)$ возможно только для $x_0 = 0$. Специально исследован случай колебания струны,

когда смычок касается точно середины струны, причем рассмотрен вопрос о существовании и устойчивости периодических решений.

Независимо от автора, аналогичные результаты получены другим методом (Friedlander F. G., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, **49**, ч. 3, 516—530.

Л. И. Камынин

5608. О распространении и структуре взрывной волны. I. Сакурai (On the propagation and structure of the blast wave, I. Sakurai Akira), J. Phys. Soc. Japan, 1953, 8, № 5, 662—669 (англ.)

Автор рассматривает распространение взрывной волны, образовавшейся в результате мгновенного выделения энергии в некотором месте пространства (плоскость — в плоском случае, прямая — в цилиндрическом, точка — в сферическом).

Движение газа в зоне взрывной волны считается локально адиабатическим и описывается при помощи обычных уравнений локально адиабатического одномерного движения газа с политропным уравнением состояния. К этим трем уравнениям присоединяются интегральное условие сохранения количества энергии за фронтом ударной волны и в качестве краевых условий — условия Гюгонио на фронте ударной волны.

Автор переходит к безразмерным переменным x, y и неизвестным функциям f, g, h с помощью соотношений

$$\left.\begin{aligned} \frac{r}{R} = x, \left(\frac{C}{U}\right)^2 = y, \\ u = Uf(x, y), \\ p = p_0\left(\frac{U}{C}\right)^2 g(x, y) = p_0 \frac{g(x, y)}{y}, \\ \rho = \rho_0 \cdot h(x, y), \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где r — расстояние от точки до места взрыва, R — расстояние от ударного фронта до места взрыва, U — скорость фронта, C — скорость звука за фронтом, u — скорость течения, p — давление, ρ — плотность.

Автор ищет решения в виде рядов по степеням y:

$$\left.\begin{aligned} f = f^{(0)}(x) + yf^{(1)}(x) + y^2 f^{(2)}(x) + \ldots, \\ g = g^{(0)}(x) + yg^{(1)}(x) + y^2 g^{(2)}(x) + \ldots, \\ h = h^{(0)}(x) + yh^{(1)}(x) + y^2 h^{(2)}(x) + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

и указывает алгоритм для нахождения функций $f^i(x)$, $g^i(x)$, $h^i(x)$. Ограничиваясь в формулах (2) одним, двумя и т. д. членами, получаем первое, соответственно второе и т. д. приближения.

Доказывается, в частности, что первое приближение совпадает с решением Тейлора. *Н. Н. Яненко*

5609. Расчет зимнего хода температуры воды водохранилищ. Пивоваров А. А., Докл. АН СССР, 1954, **94**, № 5, 861—864

Решается одномерное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = k\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

для системы с двумя различными коэффициентами теплопроводности k:

$$k = \begin{cases} k_1 \text{ при } -l \leqslant z \leqslant 0 \quad \text{(вода)} \\ k_2 \text{ при } \quad 0 < z < \infty \quad \text{(грунт)} \end{cases}$$

при граничных условиях

$$t_1(-l, \tau) = 0 \text{ (лёд)}, \; t_2(\infty, \tau) < \infty$$

и условиях сопряжения

$$t_1(0, \tau) = t_2(0, \tau), \; c_1\rho_1 \frac{\partial t_1}{\partial z}\bigg|_{z=0} = c_2\rho_2 \frac{\partial t_2}{\partial z}\bigg|_{z=0}$$

Начальная температура грунта $t_2(z, 0) = f(z)$, начальная температура воды $t_1(z, 0) = \theta = \text{const}$.

Строится решение в виде рядов и кратко обсуждается характер сходимости. Указывается, что автором проведены численные расчеты для различных значений входящих параметров. *Ю. Н. Днестровский*

5610. Вторичный поток внутри трубы. Эйхенбергер (Secondary flow within a bend. Eichenberger Hans P.), J. Math. and Phys., 1953, **32**, № 1, 34—42 (англ.)

В цилиндрической системе координат r, φ, z стенки трубы представляются уравнениями $r = r_0$, $r = r_i$ $(r_0 > r_i)$, $z = \pm h$, начальное и конечное сечения трубы — равенствами $\varphi = 0$ и $\varphi = \text{const}$. В сечении трубы $\varphi = 0$ заданы компоненты вектора скорости в направлении осей r, φ, z при помощи равенств $U = 0$, $V = V(r, z)$, $W = 0$ и задано давление P так, что величина $S = (P + \frac{1}{2}\rho V^2)_{\varphi=0}$, где ρ — плотность жидкости, не зависит от r. Требуется определить все элементы потока идеальной несжимаемой жидкости внутри трубы. Решение ищется в виде наложения потенциального потока и некоторого добавочного вихревого потока. Компоненты вектора скорости потенциального потока и соответствующее ему давление представляются соответственно равенствами

$$U_p = 0, \; V_p = \frac{c}{r}, \; W_p = 0, \; \frac{\partial}{\partial r} P_p = \rho\frac{c^2}{r^3}, \quad (1)$$

где c — постоянная, определяемая расходом жидкости. Для компонент вектора скорости добавочного потока u, v, w в направлении осей r, φ, z и для добавочного давления p путем линеаризации общих уравнений гидромеханики получаются равенства

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \; v = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \; w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + r^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v_0}{r} + \frac{p_0}{\rho c}\right) - f(r, z), \quad (2)$$

где v_0 и p_0 — значения v и p в сечении трубы $\varphi = 0$, $\Phi = \Phi(r, \varphi, z)$ — функция, являющаяся решением уравнения Пуассона

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \varphi r^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{v_0}{r} + \frac{p_0}{\rho c}\right) \quad (3)$$

в области $r_i \leqslant r \leqslant r_0$, $-h \leqslant z \leqslant h$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ при краевых условиях

$$\Phi(r, 0, z) = \Phi(r, 2\pi, z) = 0, \frac{\partial \Phi(r, \varphi \pm h)}{\partial z} =$$

$$= \varphi r^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v_0}{r} + \frac{p_0}{\rho c}\right), \frac{\partial \Phi(r_0, \varphi, z)}{\partial r} = \frac{\partial \Phi(r_i, \varphi, z)}{\partial r} = 0.$$

В том случае, когда правая часть уравнения (3) равна нулю, краевая задача решается методом разделения переменных. Приводится числовой пример. *Г. Н. Положий*

5611. Некоторые плоские задачи теории фильтрации газа в угольном пласте. Полубаринова-Кочина П. Я., Прикл. матем. и механика, 1954, 18, № 1, 8—14

В начале работы рассмотрены плоские задачи установившейся фильтрации изотермического газа в угольном пласте. В этом случае квадрат давления удовлетворяет уравнению Лапласа. Изучен ряд частных задач; фильтрация к штреку, к скважине в бесконечной полуплоскости, к стенкам выработки при наличии скважины. Найдены линии тока, изобары и расходы газа через стенки забоя. Во всех задачах область фильтрации ограничена прямыми линиями, и решение сводится к нахождению функции, конформно отображающей эту область на полуплоскость. Показано, что результаты, полученные для изотермического газа при постоянной проницаемости пласта, легко могут быть пересчитаны на случай, когда проницаемость и плотность газа являются некоторыми функциями только лишь давления.

Далее исследуется плоская неустановившаяся фильтрация в области прямого угла. При пластовом давлении, значительно большем забойного, нелинейное уравнение фильтрации (Полубаринова-Кочина П. Я., Прикл. матем. и механика, 1953, 17. № 6, 735—738) приближенно заменяется уравнением типа теплопроводности для квадрата давления. Без вывода приведено его решение при постоянном забойном давлении на сторонах прямого угла и начальном пластовом давлении во всех внутренних точках области фильтрации.

Рассмотрен также случай прямоугольного забоя, перемещающегося параллельно самому себе. Приведены графики изобар и линий тока для разобранных задач. *В. Л. Данилов*

5612. Общие решения уравнений Максвелла. Дюран (Solutions générales des équations de Maxwell. Durand Émile), C. r. Acad. sci., 1953, 236, № 14, 1407—1409 (франц.)

Рассматривается задача о непосредственном интегрировании уравнений Максвелла при произвольной зависимости от времени плотностей токов и зарядов в однородной среде. Исходным моментом в решении является известное тождество

$$4\pi \mathbf{A}(x_1, x_2, x_3, t) = -(\partial_u \partial^u - q^2) \int [\mathbf{A}]_\tau \frac{dx_1' dx_2' dx_3'}{r},$$

где $\partial_u = \partial / \partial x_u$; $u = 1, 2, 3$; $q = (1/v)(\partial / \partial t)$, $\partial_u \partial^u$ означает сумму вторых производных. $[\mathbf{A}]_\tau$ есть вектор **A**, взятый в точках (x_1', x_2', x_3') и в момент времени $\tau = t - r/v$. Используя соотношение

$$-\Box = -\partial_u \partial^u + q^2 = \text{rot rot} - \text{grad div} + q^2$$

и преобразуя объемные интегралы в поверхностные, автор для двух векторов **A** и **B** находит тождество

$$4\pi \mathbf{A} = \text{rot}\left\{\int [\text{rot}' \mathbf{A} \pm q\mathbf{B}]_\tau \frac{dv'}{r} - \int_s [\mathbf{n} \times \mathbf{A}]_\tau \frac{dn'}{r}\right\} -$$

$$- \text{grad}\left\{\int [\text{div}' \mathbf{A}]_\tau \frac{dv'}{r} - \int_s (\mathbf{nA})_\tau \frac{ds'}{r}\right\} +$$

$$+ q\left\{\int [q\mathbf{A} - (\pm)\,\text{rot}' \mathbf{B}]_\tau \frac{dv'}{r} \pm \int_s [\mathbf{n} \times \mathbf{B}]_\tau \frac{ds'}{r}\right\},$$

где rot′ и div′ применяется к штрихованным координатам, а **n** есть единичный вектор внешней нормали к поверхности s.

Разумея под векторами **A** и **B** один раз **E** и $\sqrt{\mu/\varepsilon}\,\mathbf{H}$, другой раз **H** и $\sqrt{\varepsilon/\mu}\,\mathbf{E}$, вводя обозначения

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int [\rho]_\tau \frac{dv'}{r} - \frac{1}{4\pi} \int_s (\mathbf{nE})_\tau \frac{ds'}{r},$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int [\mathbf{i}]_\tau \frac{dv'}{r} - \frac{\mu}{4\pi} \int_s [\mathbf{n} \times \mathbf{H}]_\tau \frac{ds'}{r},$$

$$V' = -\frac{1}{4\pi} \int_s (\mathbf{nH})_\tau \frac{ds'}{r}, \quad \mathbf{A}' = \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_s [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]_\tau \frac{ds'}{r},$$

получим искомые решения уравнений Максвелла

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\varepsilon} \text{rot}\, \mathbf{A}' - \text{grad}\, V - \frac{\partial A}{\partial t},$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot}\, \mathbf{A} - \text{grad}\, V' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t}.$$

Полученные решения аналогичны решениям для гармонических колебаний, которые могут быть получены при помощи векторного аналога теоремы Грина. *П. П. Бирюлин*

5613. Конформные преобразования в волновой механике. Фор (Transformations conformes en mécanique ondulatoire. Faure Robert), C. r. Acad. sci., 1953, 237, № 12, 603—605 (франц.)

Рассматриваются преобразования уравнения Шредингера

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}[E - U(x, y)]\,\psi = 0. \qquad (1)$$

Преобразованием $z = x + iy = f(Z)$, где $Z = X + iY$, а $f(Z)$ аналитическая функция от Z, уравнение (1) переводится в следующее:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - U)\left[\left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial X}\right)^2\right]\psi = 0.$$

Последнее сводится к уравнению типа (1) при выполнении равенства

$$|f'(Z)| = |h| / |U|^{1/2} \quad (h = \text{const}),$$

что возможно только тогда, когда $\log U$ есть гармоническая функция x и y. Если это имеет место, то в определенных случаях задача о собственных значениях для функции $|f'(Z)|^2$ может быть сведена к соответствующей задаче для функции $U(x, y)$.

В качестве примера рассмотренно преобразование уравнения плоского движения осциллятора

($|f'(Z)|^2 = 4(X^2 + Y^2)$) в уравнение плоского движения электрона в атоме ($U(x, y) = \alpha/(x^2 + y^2)^{1/2}$). *П. П. Бирюлин*

5614. О соотношении Лоренца. Николау (Asupra relației lui Lorentz. Nicolau Edmond), Bul. Ştiinţ. Acad. R. P. Române, Sec. mat. şi fiz., 1953, **15**, № 1, 191—198 (рум.; резюме русск., франц.)

Известно, что в электромагнитной теории к уравнениям

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} + \mu\varepsilon \nabla \frac{\partial v}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0,$$

$$\nabla^2 v + \nabla \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0 \qquad (1)$$

присоединяют соотношения Лоренца, дающие еще одну связь между векторным и скалярным электромагнитными потенциалами **A** и v. Если рассматриваемая среда однородна и изотропна, то это соотношение будет

$$\nabla \mathbf{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} + \mu\sigma v = 0. \qquad (2)$$

Реферируемая работа рассматривает вопрос о том, является ли уравнение (2) некоторым дифференциальным следствием системы (1).

При решении поставленной задачи автор следует методу Мойсила (Moisil Gr. C., Matricele asociate sistemelor de ecuaţii cu derivate partiale, Ed. Acad. R. P. Române, 1950); используя средства алгебры дифференциальных операторов, он доказывает, что уравнение (2) не является линейным дифференциальным следствием уравнений (1). *Е. И. Ким*

5615. Общие соображения о краевых условиях в электродинамике движущихся тел. Лампариелло (Allgemeine Betrachtungen über die Randwertbedingungen in der Elektrodynamik bewegter Körper. Lampariello G.), Z. angew. Math. und Mech., 1953, **33**, № 8/9, 274—275 (нем.)

Зоммерфельдом было показано, что при движении тела в стационарном электромагнитном поле в тех точках поверхности тела, в которых скорость касательна к поверхности, выполняются обычные граничные условия для векторов **E** и **H**.

Автор статьи (без доказательства) утверждает, что если вектор **B** непрерывен на границе тела, то остается справедливым условие непрерывности $\mathbf{E}_\tau$, и в тех случаях, когда ограничения Зоммерфельда сняты, наоборот, условие непрерывности $\mathbf{H}_\tau$ при этом перестает, вообще говоря, быть справедливым. Автор приводит два примера, иллюстрирующих его замечание. Вопросы такого порядка возникают, например, в связи с расчетом электрического поля, порождаемого движением Земли вокруг Солнца, если считать, что магнитное поле Солнца известно. *Д. П. Костомаров*

5616 К. Уравнения в частных производных второго порядка, т. I. Кшижанский (Rownania rozniczkowe cząstkowe drugiego rzędu. T. I. Krzyżański M. (Z. serii «Biblioteka Matematyczna»), 22 ark., Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1954, 16 Rb.), Biul. eksportowy, 1954, № 1, 20 (библ.)

5617 РЕЦ. Небесная механика. Канонические уравнения и изменение постоянных. Шази (Mécanique céleste. Équations canoniques et variation des constantes. Chazy Jean, 270 pp., Presses Universitaires de France, 1 vol., 1953) [**Рецензия: Леви** (Lévy Jacques), Bull. sci. math., 1953, сер. 2, **127**, juill.-août, 105—107 (франц.)]

Автор рецензии высоко оценивает книгу Шази, рассматривая ее как превосходно написанное введение в практическую небесную механику. Книга состоит из шести глав.

Глава I посвящена замене переменных, которая не изменяет канонического вида уравнений. В главе II излагаются принципы Гамильтона и Мопертюи и теория геодезических линий в пространстве n измерений. Глава III посвящена решению дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры. В главе IV излагается теорема Якоби и ее применение к эллиптическому движению. В главе V рассматривается метод изменения постоянных. Глава VI содержит некоторые приложения теории возмущенного движения.

Г. Н. Дубошин

См. также: 5417 К, 5447, 5539, 5554, 5656, 5666, 5667 Д, 5712, 5779, 5800

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

5618. О некоторых особых интегральных уравнениях. Черский Ю. И., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1953, **113**, № 10, 43—55

Дается теория особых интегральных уравнений вида

$$f(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k_p(x - t) f(t)\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} n(x, t) f(t)\, dt = g(t) \qquad (1)$$

$$p = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0 \\ 2 & \text{при } x < 0 \end{cases},$$

$$f(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k_q(x - t) f(t)\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} n(x, t) f(t)\, dt = g(t) \qquad (2)$$

$$q = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0 \\ 2 & \text{при } t < 0 \end{cases},$$

где $n(x, t)$ — регулярное ядро, исчезающее при $t \to \pm\infty$ независимо от x; $k_1(x-t)$ и $k_2(x-t)$ — особые ядра, не исчезающие при $t \to \pm\infty$ или $x \to \pm\infty$, если положить $x = t + \text{const}$. Частный случай уравнения (1), когда $n(x, t) \equiv 0$, рассматривался И. М. Рапопортом (Сб. тр. Ин-та матем. АН УССР, 1949, № 12).

Построенная теория вполне аналогична хорошо известной теории сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши, к которым уравнения (1), (2) приводятся при помощи трансформации Фурье. Рассматриваемые уравнения могут быть сведены и одно к другому.

Исследование проводится при следующих предположениях:

$$k_1(x) \text{ и } k_2(x) \in L(-\infty, \infty); \; g(x) \text{ и } f(x) \in L^2(-\infty, \infty);$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int |n(x, t)|^2 \, dx \, dt < \infty.$$

Сначала рассматриваются так называемые характеристические особые уравнения, получающиеся из (1) и (2) при $n(x, t) \equiv 0$. Их решения получаются в замкнутом виде двумя методами: путем приведения к характеристическим сингулярным интегральным уравнениям с ядром Коши, а также путем построения специальных операторов, отыскиваемых при помощи трансформации Фурье, и решения получающейся при этом краевой задачи Римана теории аналитических функций.

Далее исследуются общие особые уравнения (1), (2). Строятся эквивалентно-регуляризирующие операторы, приводящие эти уравнения к уравнениям Фредгольма. Указывается на возможность регуляризации также способом, аналогично способу Векуа—Карлемана из теории сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши, и на справедливость известных теорем Нётера об условиях разрешимости и числе решений.

В заключение отмечается, что изложенная теория остается в силе и при более общих предположениях относительно классов функций, например, при

$$|g(x)| < \infty; \; |f(x)| < \infty; \; k_1(x) \text{ и } k_2(x) \in L, \; L^2;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |n(x, t)| \, dt < \infty.$$

Л. А. Чикин

5619. Сведение к интегральным уравнениям проблемы, аналогичной основной бигармонической задаче. Пини (Traduzione in equazioni integrali di un problema analogo al problema biarmonico fondamentale. Pini Bruno), Rend. Seminar mat. Univ. Padova, 1953, 22, № 1, 192—206 (итал.)

Решается смешанная задача для уравнения

$$Iu \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F \qquad (1)$$

в области D, определенной условиями $0 \leqslant y \leqslant a$, $\chi_1(y) \leqslant x \leqslant \chi_2(y)$; $\chi_1(y) < \chi_2(y)$. Искомое решение должно удовлетворять начальным условиям

$$u = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \psi(x) \quad \text{при} \quad y = 0 \qquad (2)$$

и граничным условиям

$$u = f_i(y) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi_i(y) \quad \text{при} \quad x = \chi_i(y), \quad i = 1, 2. \qquad (3)$$

Одним из решений неоднородного уравнения (1) является объемный потенциал, соответствующий известному сингулярному решению однородного уравнения (1). Поэтому автор ограничивается в дальнейшем решением однородного уравнения (1), которое мы обозначим (1*). Решение уравнения (1*) при условиях (2) дается с помощью формулы, аналогичной известной формуле Пуассона для уравнения теплопроводности. Таким образом, общая задача сводится к решению уравнения (1*) при условиях (3) и нулевых условиях (2) ($g = \psi \equiv 0$). Решение этой последней задачи ищется в виде

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{2} \int_0^y \mu_i(\eta) \, U_{0,1/2}(x, y; \chi_i(\eta), \eta) \, d\eta + \sum_{i=1}^{2} \int_0^y \nu_i(\eta) \, U_{2,3/2}(x, y; \chi(\eta), \eta) \, d\eta, \qquad (4)$$

где

$$U_{m,n}(x, y; \xi, \eta) = \frac{(x-\xi)^m}{(y-\eta)^n} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right].$$

Для определения плотностей μ_i и ν_i получена система интегральных уравнений типа Вольтерра 2-го рода. При условиях непрерывности χ_i, χ_i', f_i, f_i', φ_i гарантируется непрерывность μ_i и ν_i.

О. А. Ладыженская

5620 К. Основы общей теории линейных интегральных уравнений. Гильберт (Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Hilbert David, XXVI + + 282 pp., Chelsea Publishing Co., New York, N. Y., 1953, 4.50 doll.)

Фото-офсетная перепечатка с издания 1912 г. [Teubner, Leipzig, 1912]

Перевод из Math. Rev., 1954, 15, № 1, 37.

5621 К. Интегральные уравнения и уравнения с бесконечно многими неизвестными. Хеллингер, Тёплиц (Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten. Hellinger E., Toeplitz O., 1335—1616 pp., Chelsea Publishing Co., New York, N. Y., 1953, 4.50 doll.)

Перепечатано с издания 1928 г. [Teubner, Leipzig].

Перевод из Math. Rev., 1954, 15, № 1, 37.

ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

5622. Системы интегральных уравнений и фигуры, получающиеся из однородных вращающихся эллипсоидов. Манд (Systèmes d'équations intégrales et figures dérivées des ellipsoïdes hétérogènes en rotation. Mendes Marcel), J. math. pures et appl., 1953, 32, № 4, 335—386 (франц.)

В первой части работы переносятся, на случай системы интегральных уравнений, основные формулы теории Фредгольма, а также проводится (следуя методу Гурса) исследование резольвенты в окрестности полюса.

В остальных частях работы рассматриваются фигуры равновесия вращающейся неоднородной жидкости, составленной из однородных слоев, отделенных или (1) конфокальными эллипсоидами вращения, или (2) концентрическими и подобными эллипсоидами вращения. Методами интегральных уравнений доказывается существование бесконечной последовательности бесконечно близких фигур, полученных бесконечно малой деформацией эллипсоидов (при неизменном объеме каждого слоя).

Общее утверждение в § 28 работы (о равенстве нулю постоянных C_i) неверно, как показывает пример (в обозначениях автора): $r=1$, поверхность S_1 — единичная сфера, $\lambda=1$, $R_1(P)=-1$, $S_1(P)=1$, $G(P,M)=-3(x\xi+x+\xi)/4\pi$, $\varepsilon(P)=Cx$.

По мнению референта, доказательство существования бесконечой серии бесконечно близких фигур вращения неполно: именно, остается недоказанным выполнение условия неизменности объема слоев. В статье совершенно не упоминается о классических исследованиях А. М. Ляпунова по этому вопросу. *Я. Б. Лопатинский*

5623. Переходные процессы в широкополосном *RC*-усилителе. С к у г о р о в В. Н., Тр. Моск. энергетич. ин-та, 1953, № 13, 162—173

Дается анализ переходных процессов в многокаскадных широкополосных *RC*-усилителях. Для оценки низкочастотных переходных процессов применяется эквивалентная схема усилителя без учета входной емкости следующего каскада. Для оценки высокочастотных переходных процессов применяется эквивалентная схема усилителя без учета емкости разъединяющего конденсатора и сопротивления утечки следующего каскада.

Нахождение уравнения переходного процесса сводится к решению интегрального уравнения

$$i(R'_a+R_c)+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} idT=0,$$

которое автор решает применением операторного метода. Выведенные уравнения могут быть использованы для проверки уже выбранных параметров. *Н. К. Круг*

См. также: 5587 5658, 5711, 5780

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

5624. О достаточных условиях непрерывности одного интеграла. Д а р б о (Sulle condizioni sufficienti per la continuità di un integrale. D a r b o G a b r i e l e), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1953, 22, № 1, 134—142 (итал.)

Функция f, определенная на измеримом множестве E, называется квазинепрерывной на E, если для каждого $\varepsilon>0$ существует замкнутое множество $E_\varepsilon\subseteq E$ такое, что $mE_\varepsilon>mE-\varepsilon$, и f непрерывна на E_ε (Tonelli L., Fondamenti di calcolo delle variazioni, vol. 1, Bologna, 1921, 131). Известно (там же, стр. 385), что если функция $Q(x,y)$ непрерывна вместе с $\frac{\partial Q}{\partial x}$ на прямоугольнике $R\{a\leqslant x\leqslant b,\ y_1\leqslant y\leqslant y_2\}$, то функционал

$$I[y(x)]=\int_a^b Q(x,\ y(x))\,y'(x)\,dx \qquad (1)$$

является непрерывным в классе K абсолютно непрерывных на $a\leqslant x\leqslant b$ функций $y(x)$, $y_1\leqslant y(x)\leqslant y_2$ (о понятии непрерывности функционала см. там же, стр. 225). Ранее было доказано (Faedo S., Rend. mat. e delle sue appl., 1943, сер. 5, 4, 223—249), что непрерывность функционала (1) сохраняется в том случае, когда $Q(x,y)$ непрерывна и равномерно удовлетворяет условию Липшица по x. В реферируемой работе, обобщающей этот результат, доказываются теоремы:

Т е о р е м а 1. Если $Q(x,y)$ квазинепрерывна на R и существуют монотонная на $[a,b]$ функция $F(x)$ и суммируемая на $[y_1,y_2]$ функция $\varphi(y)$, для которых при любой паре точек $(x',y)\in R$, $(x'',y)\in R$ справедливо неравенство

$$|Q(x',y)-Q(x'',y)|\leqslant|F(x')-F(x'')|\cdot\varphi(y),$$

то для любой функции $y(x)\in K$ функция $Q(x,y(x))\times y'(x)$ квазинепрерывна на $[a,b]$.

Т е о р е м а 2. Если $Q(x,y)$, кроме того, ограничена в R, то функция $Q(x,y(x))\cdot y'(x)$ суммируема и функционал

$$I[y(x)]=\int_a^b Q(x,\ y(x))\cdot y'(x)dx$$

равномерно непрерывен в K, т.е. для любых двух функций $y(x)\in K$, $\bar{y}(x)\in K$ справедливо соотношение

$$|I[y(x)]-I[\bar{y}(x)]|\leqslant\theta(\rho),$$

где $\rho=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|y(x)-\bar{y}(x)|$ и $\theta(\rho)$ стремится к нулю вместе с ρ. Доказательства теорем основаны на лемме:

Л е м м а. Пусть $y(x)$ абсолютно непрерывна на $[a,b]$; через H обозначим множество точек из $[a,b]$, в которых $y(x)$ не имеет производной или имеет производную, равную нулю; пусть $E(\Delta)$ — множество точек из $[a,b]$, в которых $y(x)\in\Delta$, где Δ — открытое переменное множество на оси ординат. Тогда при $|\Delta|\to 0$ ($|\ |$ обозначает меру) $|E(\Delta)-H|\to 0$. *М. К. Керимов*

5625. Вычисление последовательных вариаций кратного интеграла инвариантным методом Де Донде. Д е - С л о в е р е (Le calcul des variations successives d'une intégrale multiple, par la méthode invariantive de Th. De Donder. D e S l o o v e r e H.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1953, 39, № 11, 948—952 (франц.)

Статья является продолжением ранее опубликованной статьи того же автора (РЖМат, 1954, 3351) и содержит некоторое обобщение инвариантного метода вычисления последовательных вариаций кратных интегралов, данного в предыдущей статье. *В. В. Вагнер*

См. также: 5584, 5776

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

5626. Всюду непрерывная, нигде не дифференцируемая функция. Мак-Карти (An everywhere continuous nowhere differentiable function. McCarthy John), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 10, 709 (англ.)

Устанавливается, что функция $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} g(2^{2^n} x)$, где $g(x)=1+x$ для $-2\leqslant x\leqslant 0$, $g(x)=1-x$ для $0\leqslant x\leqslant 2$, и $g(x)$ имеет период 4, непрерывна и нигде не дифференцируема. *А. А. Конюшков*

5627. О системах Фекете множеств, состоящих из произвольного конечного числа конечных сегментов прямой линии. И. Германский (On the Fekete-systems of sets consisting of an arbitrary finite number of finite and closed intervals of a straight line. I. Germansky Baruch), Riveon lematematika, 1953, **6**, 61—78 (англ.)

Пусть M — произвольное замкнутое множество на плоскости. Для каждого m рассмотрим произвольные m точек p_k из M и выберем систему точек, для которой произведение $\Pi\,|p_{ik}|$, $i<k$; $i, k=1, 2, \ldots, m$ имеет относительный максимум; здесь p_{ik} означает расстояние между p_i и p_k. Системы такого рода были введены и изучались Фекете (Fekete M., Math. Z., 1923, **17**, 228—249). Автор настоящей статьи рассматривает вопрос об определении таких систем в интересном случае, когда множество M состоит из конечного числа неналегающих сегментов действительной оси. Показано, что при достаточно больших m эти системы обязательно содержат концы всех сегментов. Таким образом, они являются частными случаями классических систем, рассмотренных Хейне и Стильтьесом, для которых можно написать дифференциальные уравнения.

Первое доказательство одного из главных результатов дано Дворецким. *G. Szegö*

Перевод из Math. Rev., 1953, **14**, № 9, 854.

5628. Заметка об одном типе неопределенности. Ферстенберг (Note on one type of indeterminate form. Furstenberg Harry), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 10, 700—703 (англ.)

Пусть n, r — натуральные числа, $\varphi(n)\geqslant 0$ и $\varphi(n)\to\infty$ при $n\to\infty$. Доказывается равенство

$$\lim_{n\to\infty}\{[\varphi(n)]^{n-r}\}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\{[\varphi(n)]^{\binom{r}{0}}[\varphi(n-1)]^{-\binom{r}{1}}\ldots[\varphi(n-r)]^{(-1)^r\binom{r}{r}}\}^{1/r!}$$

Примечание референта. Доказательство можно значительно сократить, если воспользоваться одной теоремой Штольца (Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1, Гостехиздат, М.—Л., 1951, 81). *А. А. Конюшков*

5629. Дифференцирование логарифма. Йейтс (Differentiating the logarithm. Yates R. C.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 2, 120 (англ.)

5630. Производные неявных функций. Спигел (Derivatives of implicit functions. Spiegel M. R.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 2, 120—121 (англ.)

Для лучшего усвоения производных от неявных функций предлагается при дифференцировании непосредственно пользоваться «Δ-процессом». *Ф. В. Широков*

5631. Функции зависимых переменных. Кахан (Functiuni de variabile legate. Kahane Arno), Gaz. mat. şi fiz. (Buocureşti), 1953, **5**, № 3, 105—114 (рум.)

В статье формально устанавливаются тождества между производными функции $u(x, y, z)$, если задано уравнение $g(x, y, z)=0$, связывающее независимые переменные. Полученные тождества применяются к выводу некоторых формул тригонометрии. Затем автор указывает на формулы, связывающие производные функции n переменных на заданном $(n-1)$-мерном многообразии. *С. А. Гальперн*

5632. О рациональном интегрировании в конечном виде некоторых биномиальных интегралов. Авдеев Н. Я., Уч. зап. Ростовского-на-Дону пед. ин-та, 1953, № 2, 21—29

Биномиальными интегралами автор называет интегралы вида

$$\int F(x, \sqrt[n]{R(x)})\,dx,$$

где F — рациональная функция от x и $\sqrt[n]{R(x)}$, а $R(x)$ — целый многочлен относительно x.

В работе показывается, что биномиальный интеграл $\int F(z, \sqrt[n]{R(z)})\,dz$, где $R(z)=(z-z')^m\times$ $\times(z-z')^{n-m}$ с помощью рационального преобразования

$$z=\frac{(x-x')^n z''-(x-x'')^n z'}{(x-x')^n-(x-x'')^n}$$

приводится к интегралу $\int \Phi(x)\,dx$, где $\Phi(x)$ — рациональная функция.

Устанавливается также, что с помощью рационального преобразования порядка q ($q=\Sigma\alpha_i=\Sigma k\beta_j$, k, α_i, β_i — целые числа)

$$z=\frac{\Pi(x-x_i)^{\alpha_i} z''-\Pi(x-x_j'')^{k\beta_j} z'}{\Pi(x-x_i')^{\alpha_i}-\Pi(x-x_j'')^{k\beta_j}}.$$

Интегрируются в конечном виде биномиальные интегралы вида

$$\int\frac{\varphi(x)\,dx}{\psi(x)\sqrt[n]{\Pi(x-x_i')^{m\alpha_i}\Pi(x-x_j'')^{\beta_j(pn-km)}}},$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — многочлены, которые должны удовлетворять некоторым условиям. *И. В. Матвеев*

5633. Одно неравенство для функций действительного переменного. Апери (Une inegalité sur les fonctions de variable réelle. Apéry Roger), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 3—4 (франц.)

Устанавливается неравенство

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx \leqslant M\int_0^{\omega} g(x)\,dx,$$

где $f(x)$ — измеримая функция, $0 \leqslant f(x) \leqslant M$, $g(x) \geqslant 0$ — убывающая функция $\omega = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx \,/ M$.

А. А. Конюшков

5634 К. Дифференциальное и интегральное исчисление. Грюсс (Differential- und Integralrechnung. Grüss Gerhard, 642 + XVI S., 2 Aufl., Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1953, DM 39) (нем.)

Книга посвящена дифференциальному и интегральному исчислению функций одного переменного и является первой частью учебного пособия для студентов математиков, физиков и инженеров. По словам автора, она может служить также справочной книгой и для научных работников.

В главе 1 рассматривается понятие действительного числа по Дедекинду и некоторые вопросы оснований математики. Вводятся понятия переменного и функции. Глава 2 содержит изложение теории элементарных функций, обзор свойств кривых второго порядка, основную теорему высшей алгебры, схему Горнера; подробно рассматривается интерполяционная формула Лагранжа, интерполяционная формула Ньютона, вводится понятие конечных разностей и оценивается максимальная погрешность при линейном интерполировании.

В главе 3 со всей строгостью вводятся понятия предела и непрерывности и даются основные теоремы о непрерывных функциях. Понятиям производной, дифференциала и основным теоремам дифференциального исчисления посвящена глава 4. Здесь же даны дифференцирование эмпирических функций, графическое дифференцирование, раскрытие неопределенностей (правила Бернулли — Лопиталя), теория максимумов и минимумов функции, методы приближенного решения уравнения $f(x) = 0$ (графический, Ньютона — Рафсона, итерации).

Интегральное исчисление излагается в главе 5. Изложение начинается с понятия определенного интеграла и основных теорем интегрального исчисления. Далее идут основные свойства определенных интегралов от непрерывных функций, основные свойства и формулы вычисления неопределенного интеграла, графическое интегрирование, формулы численного интегрирования (Кеплера, Симпсона с остаточными членами), различные инструменты для механического интегрирования. В главе 6 подробно рассматриваются более тонкие вопросы интегрального исчисления (теория интегрирования по Риману), теория несобственных интегралов, некоторые вопросы теории гамма-функции; дополнительные вопросы интегрального исчисления, например неравенство Буняковского — Шварца.

В главе 7 дана формула Тейлора и теория рядов Тейлора и их применения к вычислению приближенных значений функций и к нахождению относительных экстремумов. В главе 8 содержится теория бесконечных последовательностей и рядов, а также степенных и тригонометрических рядов. Глава 9 содержит геометрические приложения дифференциального и интегрального исчисления. Здесь приведены теория особых точек кривых, вычисление длины дуги, уравнения эволюты и эвольвенты, вычисление площадей плоских областей при помощи криволинейного интеграла, теория планиметра. Здесь же рассматриваются некоторые вопросы аналитической и дифференциальной геометрии (прямая, кривизна кривой и т. д.).

Все изложение сопровождается хорошо подобранными примерами и рисунками. Изложение весьма четкое, благодаря чему автору удалось при сравнительно небольшом объеме дать огромный материал с приведением всех необходимых доказательств.

М. К. Керимов

5635 К. Теория элементарных функций. Шмидт (Analysis der elementaren Funktionen. Schmidt Harry, 148 S., VEB Verlag Technik, Berlin, 1953, DM 16) (нем.)

Книга является дополнительным пособием для студентов, изучающих дифференциальное и интегральное исчисления. В ней подробно рассматривается теория целых и дробных рациональных функций, а также простейшие понятия дифференциального и интегрального исчислений, необходимые для применений этих функций. Все параграфы сопровождаются хорошо подобранными примерами.

Содержание книги: 1) Обзор необходимых формул дифференцирования; 2) Определенный и неопределенный интегралы; 3) Формулы интегрирования; 4) Биномиальные коэффициенты и теорема о биноме; 5) Целые рациональные функции; 6) Дробные рациональные функции; 7) Разложение на простые дроби; 8) Практические методы разложения на простые дроби; 9) Об алгебраическом решении уравнений; 10) Интегрирование рациональных функций; 11) Замечания о многочленах от многих переменных.

М. К. Керимов

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

5636. Суммирование рядов, содержащих корни трансцендентных уравнений, и соответствующие приложения. Спигел (The summation of series involving roots of transcendental equations and related applications. Spiegel M. R.), J. Appl. Phys. (N. Y.), 1953, 24, № 9, 1103—1106 (англ.)

Автор вычисляет для нескольких частных случаев суммы вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^k}$ $(k = 1, 2, 3, 4)$, где λ_n — нули целой функции, пользуясь выражениями этих сумм через тейлоровские коэффициенты функции. Автор нигде не указывает, однако, что используемые им формулы справедливы лишь для функций нулевого рода.

М. А. Лукомская

5637. Множители суммируемости для рядов, абсолютно суммируемых по Чезаро. Пейеримхофф (Summierbarkeitsfaktoren für absolut Cesàro-summierbare Reihen. Peyerimhoff

Alexander), Math. Z., 1954, 59, № 4, 417—424 (нем.)

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ называется $|C_\alpha|$-суммируемым ($\alpha > -1$), если абсолютно сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$, где $\alpha_0 = a_0$, $\alpha_n = \frac{1}{nA_n^\alpha} \sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} \nu a_\nu$, $n = 1, 2, \ldots$,

$$A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n}.$$

Доказывается: Для того чтобы при помощи последовательности $\{\varepsilon_n\}$ любой $|C_\alpha|$-суммируемый ряд ($\alpha \geqslant 0$) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ преобразовывался в ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n a_n$, $|C_\beta|$-суммируемый ($\beta \geqslant 0$), необходимо и достаточно, чтобы

1) $\varepsilon_n = O(n^{\beta-\alpha})$ для $\beta \leqslant \alpha$, $O(1)$ для $\beta > \alpha$,

2) $\Delta^\alpha \varepsilon_n = O(n^{-\alpha})$,

где $\Delta^\alpha \varepsilon_n = \sum_{k=n}^{\infty} A_{k-n}^{-\alpha-1} \varepsilon_k$.

Некоторые частные случаи этой теоремы были рассмотрены ранее в работах Когбетлиантц (Kogbetliantz E., Bull. Sci. Math., 1925 (2), 49, 234—256; Bosanquet L. S., Proc. London Math. Soc., 1949 (2), 50, 482—496). *М. Д. Калашников*

5638. Теорема о суммировании методом Эйлера для произведения рядов по Коши. Хара (On the Cauchy's product series theorem on Euler's summability. Hara Hisao), Kodai Math. Sem. Repts, 1953, № 3, 91—92 (англ.)

Ряд $\sum_{p=0}^{\infty} c_p$, где $c_p = \sum_{m+n=p} a_m b_n$, $p = 0, 1, \ldots$, называется произведением Коши рядов

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \quad (1) \text{ и } \sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad (2).$$

Говорят, что ряд (1) абсолютно суммируем методом Эйлера (E, p) к сумме A, и пишут $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A(|E, p|)$, если преобразование Эйлера $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(p)}$ (Харди, Расходящиеся ряды, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1951, 224) этого ряда абсолютно сходится и имеет своей суммой число A.

Доказывается:

1) Если $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A(|E, p|)$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A - a_0(|E, p|)$ и обратно.

2) Если $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A(|E, p|)$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B(|E, p|)$, то $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = C(|E, p|)$, причем $C = AB$.

Последнее утверждение является распространением на метод суммирования Эйлера известной теоремы Коши о произведении рядов (Харди, цит. соч., 284). *М. Д. Калашников*

5639. Суммирование медленно сходящихся рядов. Гумовский (Summation of slowly converging series. Gumowski Igor), J. Appl. Phys., 1953, 24, № 8, 1068 (англ.)

Методами операционного исчисления выводится вариант формулы суммирования Эйлера — Маклорена (Харди Г., Расходящиеся ряды, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1951, гл. XIII). Коэффициенты b_m при $m \geqslant 2$ в статье суть числа Бернулли, деленные на соответствующие факториалы. Значения первых семи коэффициентов b_m даны неточно. Числовой пример с суммированием $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}$ был выполнен еще Эйлером (Харди, цит. соч., 406), который, беря столько же начальных членов, вычислил его сумму с 18 знаками, тогда как автор с 7. Сходимость процессов автор не рассматривает.

Ф. В. Широков

5640. Тауберовы теоремы для суммируемости по Риману. Суноути (Tauberian theorems for Riemann summability. Sunouchi Genichirô), Tôhoku Math. J., 1953, сер. 2, 5, № 1, 34—42 (англ.)

Ряд
$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \qquad (1)$$
с частными суммами s_n называется суммируемым (R_1) к сумме s, если для любого t в интервале $0 < t < \delta < 2\pi$ сходится ряд $\sum_{\nu=1}^{\infty} (s_\nu \sin \nu t)/\nu = \varphi(t)$ и если $\lim_{t \to +0} \varphi(t) = s$. Ряд (1) называется суммируемым $(R, 1)$ к сумме s, если для указанных выше t сходится ряд $\sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \sin \nu t)/\nu t = \varphi(t)$ и если $\lim_{t \to 0} \varphi(t) = s$.

Доказывается, что если $\sum_{\nu=1}^{n} s_\nu = o(n^\alpha)$ и $\sum_{\nu=n}^{\infty} |a_\nu|/\nu = O(n^{-\alpha})$, где $0 < \alpha < 1$, то ряд (1) суммируется методами (R_1) и $(R, 1)$ к 0.

Доказана также теорема о равномерной сходимости тригонометрического ряда:

Если $\sum_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu = o(n^\alpha)$, $\sum_{\nu=n}^{\infty} |\Delta a_\nu| = O(n^{-\alpha})$ $(0 < \alpha < 1)$, где $\Delta a_\nu = a_\nu - a_{\nu+1}$, то ряд $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \sin \nu t$ сходится равномерно на сегменте $[0, \pi]$.

Исправление доказательства теоремы о суммируемости (R,1) см. в статье автора в Tôhoku Math. J., 1953, 5, № 2, 189. *Ф. В. Широков*

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

5641. О гамма-функции. Ван-дер-Поль (Note on the gamma function. Van der Pol B.), Canad. J. Math., 1954, 6, № 1, 18—22 (англ.)

Автор устанавливает выражение гамма-функции в виде бесконечного произведения

$$\Gamma(z+1) = z^z e^{-z} \prod_{k=0}^{\infty} \frac{e_{k+z}}{e_k} \qquad (1)$$

и в виде предела

$$\Gamma(z+1) = \sqrt{2\pi}\, z^z e^{-z} \lim_{n \to \infty} \left\{ \sqrt{n} \prod_{k=0}^{n} \left(\frac{e_{k+z}}{e} \right) \right\},$$

где $e_\alpha = (1 + 1/\alpha)^\alpha$, $e_0 = 1$.

Формулу (1) автор выводит из известного разложения

$$\log \Gamma(z+1) + Cz = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{z}{k} - \log\left(1 + \frac{z}{k}\right) \right],$$

представив правую часть в форме интеграла Стилтьеса

$$\int_{1-0}^{\infty}\left(\frac{z}{s}-\log\left(1+\frac{z}{s}\right)\right)d[s],$$

где $[s]$ — целая часть s, и применив затем интегрирование по частям. Как следствие формулы (1) получаются основные свойства гамма-функции, как-то основное разностное уравнение, формула Гаусса

$$\Gamma(z+1)=\lim_{n\to\infty}\left\{n^z\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1+z/k}\right\}\text{ и т. п.}$$

Н. С. Кошляков

5642. О вронскиане функций Лагерра 1-го и 2-го рода и о многочленах, с ними ассоциированных. Паламà (Sul Wronskiano delle funzioni di Laguerre di 1ª e 2ª specie e su dei polinomi ad esse associati. Palamà G.), Boll. Unione mat. ital., 1953, сер. 3, 8, № 2, 185—193 (итал.)

1) Рассматриваются многочлены Лагерра

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{1}{n!}x^{-\alpha}e^{x}\frac{d^n\left(x^{\alpha+n}e^{-x}\right)}{dx^n}$$

и функции Лагерра 2-го рода

$$l_n^{(\alpha)}(x)=\frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi n!}}\Gamma(\alpha+n+1)\int_0^x\frac{(x-t)^n e^t}{t^{\alpha+n+1}}dt.$$

Те и другие удовлетворяют уравнению $xy''+(\alpha+1-x)y'+ny=0$. Основным результатом является формула

$$W_{\alpha,n}(x)=\Gamma(\alpha+n+1)\,x^{-\alpha-1}e^{-x}/\sqrt{2\pi}\,n!,$$

где $W_{\alpha,n}(x)$ есть определитель Вронского функций $L_n^{(\alpha)}(x)$ и $l_n^{(\alpha)}(x)$. Попутно устанавливается несколько рекуррентных соотношений для $l_n^{(\alpha)}(x)$.

2) Многочленом, ассоциированным с $L_n^{(\alpha)}(x)$ и $l_n^{(\alpha)}(x)$, автор называет функцию

$$P_n^{(\alpha)}(x)=\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\alpha+1)}\left[l_n^{(\alpha)}(x)-l_0^{(\alpha)}(x)\,L_n^{(\alpha)}(x)\right]x^{\alpha}e^{-x}.$$

Доказывается, что это целый многочлен степени $n-1$, и устанавливается ряд формул, содержащих $P_n^{(\alpha)}(x)$. Для примера приведем следующую:

$$L_n^{(\alpha)}(x)\,P_{n+1}^{(\alpha)}(x)-L_{n+1}^{(\alpha)}P_n^{(\alpha)}(x)=\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{(n+1)!\,\Gamma(\alpha+1)}.$$

В заключение рассматриваются функции $l_n^{\alpha}(x)$ при $n<0$ (они вводятся посредством рекуррентной формулы). Доказывается, что

$$l_{-n}^{(\alpha)}(x)=x^{-\alpha}e^{x}F_n^{(\alpha)}(x),$$

где $F_n^{(\alpha)}(x)$ — целый многочлен степени $n-1$.

И. П. Натансон

5643. Некоторые свойства полиномов, аналогичных полиномам Лагерра. Денисюк (Деякі властивості поліномів, аналогічних до поліномів Лягерра. Денисюк І. М.), Доповіді АН УРСР, 1954, № 2, 79—81 (укр.; резюме русск.)

Для ранее введенных автором (Науч. тр. Моск. горн. ин-та, 1952, № 10) полиномов $M_n(x)$, аналогичных нормированным полиномам Лагерра $L_n(x)$, в данной статье дается явное выражение $M_n(x)$ через $L_n(x)$ в виде

$$M_n(x)=e^{x/2}\left\{(-1)^n-\frac{1}{2}\int_0^x e^{-\xi/2}L_n(\xi)\,d\xi\right\}.$$

Указывается для полиномов $M_n(x)$ производящая функция $\psi(x,t)=e^{xt/(t-1)}/(1+t)$, а также дифференциальное уравнение с частными производными, которому удовлетворяет функция $\psi(x,t)$, и разностно-дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет сумма полиномов $M_n(x)$ со смежными индексами.

Г. Н. Савин

5644. О производных по параметру многочленов Лагерра и ультрасферических многочленов. Тоскано (Sulle derivate dei polinomi di Laguerre e del tipo ultrasferico rispetto al parametro. Toscano Letterio), Boll. Unione mat. ital., 1953, сер. 3, 8, № 2, 193—195 (итал.)

Пусть

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{e^x x^{-\alpha}}{n!}\cdot\frac{d^n\left(e^{-x}x^{\alpha+n}\right)}{dx^n},$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}\times$$

$$\times(1+x)^{-\beta}\frac{d^n\left[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right]}{dx^n},$$

$$W_n^{(s)}(x)=P_n^{\left(\frac{s-1}{2},\frac{s-1}{2}\right)}(x).$$

В работе доказано, что

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}L_n^{(\alpha)}(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}L_{n-k}^{(\alpha+k)}(x),\qquad(1)$$

$$\frac{\partial}{\partial s}W_n^{(s)}(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}\left[(-1)^{k-1}\left(\frac{1+x}{2}\right)^k-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1-x}{2}\right)^k\right]W_{n-k}^{(s+2k)}(x),\qquad(2)$$

$$\frac{\partial}{\partial s}W_n^{(s)}(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}\left[\left(\frac{1+x}{2}\right)^k P_{n-k}^{\left(\frac{s-1}{2}+k,\frac{s-1}{2}+k\right)}(x)+\right.$$

$$\left.+(-1)^n\left(\frac{1-x}{2}\right)^k P_{n-k}^{\left(\frac{s-1}{2}+k,\frac{s-1}{2}+k\right)}(-x)\right].\qquad(3)$$

Примечание референта. Методом автора можно получить формулы

$$\frac{\partial P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{\partial\alpha}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{1+x}{2}\right)^k P_{n-k}^{(\alpha+k,\beta+k)}(x),\qquad(2')$$

$$\frac{\partial P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{\partial\alpha}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{1+x}{2}\right)^k P_{n-k}^{(\alpha,\beta+k)}(x),\qquad(3')$$

более общие, чем (2) и (3). *И. П. Натансон*

5645. Определение пределов при $n\to\infty$, к которым стремятся относительные экстремумы n-го полинома Лежандра. Трикоми (Determinazione dei limiti per $n\to\infty$ degli estremi relativi dell'n^{esimo} polinomio di Legendre. Tricomi Francesco G.), Boll. Unione mat. ital., 1953, 8, сер. 3, № 2, 107—109 (итал.)

Доказывается формула

$$\lim_{n\to\infty} P_n(\alpha_{r,n}) = J_0(j_{1,r}), \qquad (1)$$

где $j_{1,r}$ означает r-й корень функции Бесселя $J_1(z)$. Формула (1) выводится из ранее доказанных автором (Tricomi F. G., Comment. math. helv., 1951, 25, 196—204) оценки

$$P_n(x) = [4/(x+3)]^{n+1} e^{-\xi/(2n+1)} \times$$
$$\times [J_0(2\sqrt{\xi}) + O(n^{-2})], \qquad (2)$$
$$\xi = \frac{(2n+1)^2}{2}\frac{1-x}{3+x},$$

и соотношения $\alpha_{r,n} = 1 - \frac{j_{1,r}^2}{2n^2} + O(n^{-4})$ между нулями $j_{1,r}$ и корнями $\alpha_{r,n}$ производной полинома $P_n(x)$. Положив в формуле (2) $x=\alpha_{r,n}$, автор доказывает, что $\lim_{n\to\infty}\xi = j_{1,r}^2/4$, откуда и вытекает формула (1). *Н. С. Кошляков*

5646. Некоторые тождества, содержащие гипергеометрические функции с основанием. Агарвал (Some basic hypergeometric identities. Agarwal R. P.), Ann. Soc. scient. Bruxelles, 1953, 67, сер. 1, № 3, 186—202 (англ.)

Джексон (Jackson, Quart. J. Math., Oxford ser., 1942, 13, 69—82; 1944, 15, 49—61) вывел ряд соотношений между гипергеометрическими функциями с основанием (РЖМат, 1954, 3375). В тех же работах он дал ряд тождеств для двойных гипергеометрических рядов с основанием, определяемых как q-аналог двойных гипергеометрических рядов Аппеля (Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н., Курс современного анализа, т. 2, Гостехиздат, М.— Л., 1934, 87).

В реферируемой статье доказана формула

$$\Phi[A,B;C;x] =$$
$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (a)_r (b)_r}{(1)_r (c)_r} {}_4\Phi_3\left[\begin{matrix}A, B, c, -r; \\ a, b, C,\end{matrix} q\right] x^r q^{r(r-1)/2} \times$$
$$\times \Phi[a+r, b+r; c+r; x],$$

где

$$(\alpha)_r = (1-q^{\alpha})(1-q^{\alpha+1})\cdots(1-q^{\alpha+r-1}), \quad |q|<1,$$

и ряд подобных разложений, являющихся q-аналогом тождеств Чонди (Chaundy T. W., Quart. J. Math., Oxford ser., 1942, 13, 159—171). Далее дан ряд соотношений между двойными гипергеометрическими рядами с основанием, в том числе и рядами высших порядков. Все эти разложения аналогичны указанным выше тождествам, полученным Джексоном.

В конце статьи рассмотрена порождающая функция для многочленов

$$y_n^{(x)} = \sum_{s=0}^{n} \frac{b_{n-s} x^s q^{\sigma s}}{(1)_s (1)_{n-s} (\beta_1)_s \cdots (\beta_k)_s},$$

где $\sigma > 0$. *Л. М. Глускин*

5647. Непрерывная дробь для $F(a, 1; c; t)$. Шентон (The continued fraction for $F(a,1;c;t)$. Shenton L. R.), Math. Gaz., 1954, 38, № 323, 39—40 (англ.)

Автор дает выражения для подходящих дробей разложения гипергеометрической функции $F(a, 1; c; t)$ в непрерывную дробь и, используя их, выводит следующие два соотношения между гипергеометрическими функциями:

$$F(-a-s,-s; 1-c-2s; t)\,F(a+s, s+1; c+2s; t) -$$
$$- t(a+s)(c+s-1)(c+2s-1)^{-1}(c+2s)^{-1} \times$$
$$\times F(1-a-s, -s; 2-c-2s; t) \times$$
$$\times F(a+s+1, s+1; c+2s+1; t) = 1,$$
$$F(-a-s, -s-1; -c-2s; t) \times$$
$$\times F(a+s+1, s+1; c+2s+1; t) - t(1+s)(c-a+s) \times$$
$$\times (c+2s)^{-1}(c+2s+1)^{-1} F(-a-s, -s;$$
$$1-c-2s; t)\,F(a+s+1, s+2; c+2s+2; t) = 1,$$

где $|t|<1$, s — целое $\geqslant 0$, $c > a > 0$.

Л. М. Глускин

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

5648. Замечание к наглядному толкованию преобразования Лапласа. Швенкхаген (Ein Beitrag zur anschaulichen Deutung der Laplace-Transformation. Schwenkhagen H. F.), Elektrotechn. Z., 1953, 74, № 5, 133—136 (нем.)

Указывается на возможность использовать известные графические методы гармонического анализа для приближенного построения графиков синус- и косинус-преобразований Фурье данной вещественной функции. *В. И. Левин*

5649. О лимитирующей теореме для интегралов Лапласа. Айзакс (On a limitation theorem for Laplace integrals. Isaacs G. L.), J. London Math. Soc., 1953, 28, № 3, ч. 3, 329—335 (англ.)

Автор устанавливает лимитирующую теорему для $|C,k|$-суммируемости интегралов Лапласа — Стилтьеса (Харди, Расходящиеся ряды, М., 1951, 80). Интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-ts_0}\, dA(t) \qquad (1)$$

называется суммируемым (C,k), если функция

$$f_k(\omega) = \omega^{-k} \int_0^{\omega} (\omega - t)^k e^{-ts_0}\, dA(t)$$

стремится к пределу при $\omega \to +\infty$. Если же $f_k(\omega)$ — функция ограниченной вариации на полупрямой $1 \leqslant \omega < +\infty$, то интеграл (1) называется $|C,k|$-суммируемым.

Для (C, k)-суммируемости Рисом (Riesz M., Acta Univ. Hungaricae Szeged, 1924, **2**, 18—31) доказана теорема:

Если $k \geqslant 0$, $\mathrm{Re}\,(s_0) = \sigma_0 > 0$ и интеграл (1) суммируем (C, k), то при $u \to +\infty$ для функции

$$A_k(u) = \int_0^u (u-t)^k \, dA(t) \qquad (2)$$

имеет место соотношение:

$$e^{-us} u^{-k} A_k(u) = o(1) \qquad (3)$$

для любого s такого, что $\mathrm{Re}\,(s) = \sigma_0$. В реферируемой работе доказано, что для $|C, k|$-суммируемости утверждение теоремы можно усилить: левая часть соотношения (3) не только стремится к нулю, но оказывается даже функцией ограниченной вариации на полуоси $1 \leqslant u < +\infty$.

Автор указывает, что для k целого неотрицательного теорема доказана Бозанкэ (Bosanquet L. S., Proc. London Math. Soc., 1953 (3), **3**, № 11, 267—304) и целью заметки является обобщение этого доказательства на любые положительные значения k. В конце статьи приводится уточнение доказанной в предшествующей работе автора (Isaacs G. L., J. London Math. Soc., 1951, **26**, 285—290) теоремы для случая $\mathrm{Re}\,(s) < 0$. *А. М. Молчанов*

5650. Определение коэффициентов Фурье при помощи операционного исчисления. Такач (A Fourier-amplitudók meghatározása operátorszámítással. Takács Jenó), Magyar hiradástechn., 1953, **4**, № 7, 93—96 (венг.)

Коэффициенты Фурье периодической функции выражаются через преобразование Лапласа начальной функции, совпадающей с данной периодической функцией на одном периоде и равной нулю вне него (импульса). Таким путем выводятся ряды Фурье некоторых простых периодических функций. *В. И. Левин*

5651 К. Операционное исчисление и нестационарные явления в электрических цепях. Контрович М. И., изд. 2-е, доп., 228 стр., Гостехиздат, М., 1953, 4 р. 50 к.

Цель книги — ознакомить инженера-электрика с основными методами операционного исчисления на базе преобразования Лапласа. При этом материал располагается так, что читатель знакомится с правилами операционного исчисления постепенно. Так, в первых пяти главах встречаются только изображения производной и интеграла и формула разложения. Такое построение книги позволяет пользоваться частью ее лицам, обладающим минимальными знаниями по высшей математике.

Главное внимание уделяется практическому применению правил — примеры, относящиеся, без исключения, к электрическим цепям с сосредоточенными или распределенными постоянными, занимают половину книги. Изложение везде четкое и ясное, хотя и не всегда строгое, но на это в соответствующих местах указывает сам автор. Несмотря на большой уклон в сторону электротехники, книга может служить для ознакомления с операционным исчислением также и других работников техники.

Оглавление. Предисловие. Глава 1. О преобразовании Лапласа. Глава 2. Нахождение исходной функции по ее лапласовой преобразованной. Глава 3. Применение операционных методов к исследованию электрических цепей с сосредоточенными постоянными. Глава 4. Применение операционных методов к исследованию длинных линий. Глава 5. Применение операционных методов к исследованию электрических цепочек. Глава 6. Некоторые теоремы и правила операционного исчисления и их применение. Глава 7. Формулы обращения Римана — Меллина и их применение к задачам операционного исчисления. Глава 8. Применение интеграла Фурье к изучению нестационарных явлений в электрических цепях. Глава 9. Метод приближенного исследования систем с малым затуханием и резонансных систем. Глава 10. Некоторые вопросы, смежные с операционным исчислением. Дополнение: О преобразованных уравнениях длинной линии в случае разрывных решений. Приложение: Таблица преобразованных функций. Литература.

Второе издание отличается от первого, вышедшего в 1949 г., главным образом, добавлением главы 9. *Э. Я. Риекстыньш*

5652 РЕЦ. Интегральные преобразования в математической физике. Трантер (Integral transforms in mathematical physics. Tranter C. J., 118 blz., 7 fig., Methuen and Co., Ltd, L., 1950, 6 s., [Рецензия: Зол (Zol. v.), Electro-techniek, 1953, **31**, № 17, 321 (голл.)

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

5653. Вариационные инвариантные свойства, выведенные из основного выражения баланса. Гландсдорф (Propriétés variationnelles et invariantives déduites de l'expression générale des bilans. Glansdorff P.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1953, **39**, № 11, 971—982 (франц.)

Известная формула дифференцирования объемного интеграла по параметру применяется в выводу уравнений неразрывности механики сплошной среды и термодинамики. Новых результатов работа не содержит. *И. С. Аржаных*

5654. Представление частотно-модулированного колебания при помощи бесселевых функций. Полдна (Die Darstellung der frequenzmodulierten Schwingung mit Besselschen Funktionen. Poledna V.), Frequenz, 1953, **7**, № 11, 336—338 (нем.)

Непосредственно применяются хорошо известные формулы Якоби-Ангера для разложения частотно-модулированного напряжения в ряд по бесселевым функциям. Такой прием в радиотехнике уже известен (Харкевич А. А., Спектры и анализ, Гостехиздат, 1952, 30). *Э. Я. Риекстыньш*

5655. О возможности определения ширины полосы пропускания, исходя из операторного сопротивления цепи. Коломбо (Sur la possibilité de définir la largeur de bande passante à partir de la distorsion subie par un transitoire. Colombo Serge), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 7, 455—457 (франц.)

В предыдущей статье (РЖМат, 1954, 5168) было отмечено, что Ω_1 может считаться величиной, характеризующей ширину полосы пропускания цепи с операторным сопротивлением $Z(p)$ только в том случае, если время установления для функции

$$s_1(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{t} s(t-\xi)\frac{\sin\Omega_1\xi}{\xi}d\xi$$

близко к времени установления для функции $s(t) \leftarrow\div 1/Z(p)$. Здесь отмечается, что если точка $p = \Omega_1$ лежит внутри круга сходимости разложения $\ln Z(p) = \alpha_0 + \alpha_1 p + \ldots$, то разность

$$s'(t) - s_1'(t) = \frac{1}{\pi}\int_{\Omega_1}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}}{Z(i\omega)}d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\Omega_1}^{\infty}\{a(\omega)\cos\omega t - b(\omega)\sin\omega t\}\,d\omega,$$

где $a(\omega)$ и $b(\omega)$ суть соответственно действительная и мнимая части $1/Z(i\omega)$, может быть разложена в асимптотический ряд вида

$$\cos\Omega_1 t\sum t^{-n}P_n(\Omega_1) + \sin\Omega_1 t\sum t^{-n}Q_n(\Omega_1),$$

и Ω_1 может считаться величиной, характеризующей ширину полосы пропускания данной цепи, если эта разность достаточно мала для значения t, при котором $s'(t)$ имеет максимальное значение. Кроме того, отмечается, что в силу сложности зависимости времени установления от параметров $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$, следует отказаться от попыток определения искажения сигнала только через его время установления.

В. И. Левин

5656. Вычисление затухания и искажения бегущих волн. Мориц (Rechnerische Ermittlung der Dämpfung und Verzerrung von Wanderwellen. Moritz Karl), Arch. Elektrotechnik, 1953, **41**, № 3, 160—180 (нем.)

Преобразованием Лапласа решается система телеграфных уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial x} + L\frac{\partial I}{\partial t} + IR = 0,$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} + (U - U_k)A + C\frac{\partial U}{\partial t} = 0 \qquad (1)$$

$$(x > 0,\ t > 0)$$

с учетом вихревых токов в земле и коронного разряда. При этом используются гипотезы и приемы, данные другими авторами. Система (1) решается только при нулевых начальных условиях.

U_k означает граничное напряжение для коронного разряда (при $U < U_k$, $A = 0$). Сначала рассматривается случай $A = 0$. Изображение выражения IR автор определяет исходя из уравнений Максвелла для электромагнитного поля в земле, и изображения $U(x,t)$ и $I(x,t)$ таким образом получают вид

$$u(x,s) = u_0\exp(-xs\sqrt{1+2\rho/s}/\omega), \qquad (2)$$

$$i(x,s) = u_0\sqrt{C/L}\,(1+2\rho/s)^{-1/4}\times$$

$$\times\exp(-xs\sqrt{1+2\rho/s}/\omega), \qquad (3)$$

где

$$\rho = -k\sqrt{s}\frac{jH_0^{(1)}(jar_0\sqrt{s})}{H_1^{(1)}(jar_0\sqrt{s})} = k\sqrt{s}H,$$

ω, a, r_0, k — физические постоянные, j — мнимая единица, u_0 — изображение $U(0,t)$.

Для совершения обратного преобразования проводятся замены

$$\sqrt{1+2kH/\sqrt{s}} \approx 1 + kH/\sqrt{s} \quad (4), \qquad H \approx 1, \quad (5)$$

после которых по известным формулам получаются приближенные решения при малых t, для различных видов u_0. Только в случае $U(0,t) = \text{const}$ $U(x,t)$ в виде интеграла дается также при $H \neq 1$. Графическое сравнение показывает заметное различие с результатом при $H = 1$.

Подобным образом при (5) и $u_0 = \exp(-\alpha\sqrt{s})$ изучается влияние коронного разряда ($U > U_k$, $A \neq 0$). В конце работы сравниваются вычисленные значения с экспериментальными данными.

Э. Я. Риекстыньш

5657. Общее решение проблемы результирующей двухчастотной модуляции. I. Стернберг, Кауфман (A general solution of the two-frequency modulation product problem. I. Sternberg R. L., Kaufman H.), J. Math. and Phys., 1954, **32**, № 4, 233—242 (англ.)

Рассмотрен метод для нахождения приближенных численных значений амплитуд результирующей модуляции на выходе системы, если на входе системы действует произвольный двухчастотный модулятор и передающая система имеет однозначную непрерывную характеристику.

Пусть характеристика системы выражается непрерывной функцией $Y = Y(X)$, которая определена и однозначна на конечном сегменте $-a \leqslant X \leqslant a$. Пусть действие двухчастотного модулятора на входе выражается значениями X, представляемыми формулой вида

$$x(t) = P\cos(pt + \theta_p) + Q\cos(qt + \theta_q),$$

$$0 < P < P + Q \leqslant 2P \leqslant a.$$

Тогда действие модулятора на выходе $y(t) = Y(x(t))$ выражается двойным рядом Фурье вида

$$y(t) \backsim \frac{1}{2}C_{00} + \sum_{m,\,n=0}^{\infty *} C_{\pm mn}\cos(\omega_{\pm mn}t + \varphi_{\pm mn}), \quad (1)$$

где $\omega_{\pm mn} = mp \pm nq$, $\psi_{\pm mn} = m\theta_p \pm n\theta_b$

$(m, n = 0, 1, 2, \ldots)$, * указывает, что суммирование ведется только по некоторым целочисленным точкам (m, n), а коэффициенты ряда выражаются в виде интегралов

$$C_{\pm mn} = (1/2\pi^2)\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(u,v)\cos(mu \pm nv)\,du\,dv$$

$$(m, n = 0, 1, 2, \ldots)$$

при

$$F(u,v) = Y(P\cos u + Q\cos v).$$

Указан метод нахождения приближенных значений коэффициентов C_{+mn} путем аппроксимации функции $Y=Y(X)$ полигональной функцией. При этом ряд вида (1), содержащий приближенные значения коэффициентов C_{+mn}, сходится для каждого t, а сумма этого ряда равномерно аппроксимирует функцию $y(t)$. Вычисление приближенных значений $C_{\pm mn}$ сводится к вычислению четырех, не зависящих от характеристики системы $Y=Y(X)$ определенных интегралов, которые представлены в виде степенных рядов, дающих возможность вычислить эти интегралы. *Н. А. Бразма*

См. также: 5437, 5520, 5531, 5534, 5542, 5543, 5557, 5600, 5604, 5605, 5618, 5722, 5788, 5801 К, 5802 **РЕЦ**

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

5658. Структура спектра нелинейных вполне непрерывных операторов. Немыцкий В. В., Матем. сб., 1953, 33 (75), № 3, 545—558

Изучается спектр нелинейного оператора A, действующего в некотором банаховом пространстве, т. е. совокупность таких чисел λ (собственных значений оператора A), что уравнение $A\varphi=\lambda\varphi$ имеет отличное от нуля θ решение φ (собственную функцию). Предполагается, что $A\theta=\theta$.

Доказывается, что спектр вполне непрерывного оператора образует множество типа F_σ. Указаны условия, при выполнении которых спектр, пополненный нулем, является замкнутым множеством. В § 3 содержится следующая теорема 3:

Если для некоторой окрестности U собственной функции φ_0, соответствующей собственному значению λ_0 непрерывного оператора A, удовлетворяется одно из неравенств

$$\frac{\|A(\varphi_1)-A(\varphi_2)\|}{\|\varphi_1-\varphi_2\|}>\frac{\|A\varphi_0\|}{\|\varphi_0\|}+\gamma_{\varphi_0},\ \gamma_{\varphi_0}>0, \quad (1)$$

$$\frac{\|A(\varphi_1)-A(\varphi_2)\|}{\|\varphi_1-\varphi_2\|}<\frac{\|A\varphi_0\|}{\|\varphi_0\|}-\gamma_{\varphi_0},\ \gamma_{\varphi_0}>0, \quad (2)$$

где $\varphi_1, \varphi_2\in U$ и $\varphi_1\neq\varphi_2$, то λ_0 — внутренняя точка спектра.

Однако в доказательстве содержится существенная ошибка: автор считает, что взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение в банаховом пространстве всегда преобразует область в область.

В § 4 указаны некоторые свойства множества собственных функций оператора A, соответствующих фиксированному собственному значению.

Примечание референта. Не существует вполне непрерывных операторов, действующих в бесконечномерном банаховом пространстве и удовлетворяющих условию (1), а для не вполне непрерывных операторов условие (1) не является достаточным для справедливости утверждения теоремы 3. Достаточность условия (2) вытекает из принципа сжатых отображений. В статье имеется ряд неточностей. Отсутствуют некоторые ссылки. *М. А. Красносельский*

Примечание редакции. См. по этому поводу статью автора «Исправление к работе [автора] „Структура спектра нелинейных вполне непрерывных операторов“, Матем. сб., 1954, 35, № 1, 174.

5659. О разложении по собственным функциям уравнений в частных разностях. Березанский Ю. М., Докл. АН СССР, 1953, 93, № 1, 5—8

Для уравнения в частных разностях

$$a_{j-1,k}u_{j-1,k}+a_{jk}u_{j+1,k}+b_{,k-1}u_{j,k-1}+b_{jk}u_{j,k+1}+c_{jk}u_{jk}-\lambda u_{jk}=0 \quad (1)$$

с вещественными коэффициентами b_{jk}, c_{jk} и положительными a_{jk} строится теория спектральных матриц; при этом уравнение (1) рассматривается в правой полуплоскости $j\geqslant 0$ с граничным условием: $u_{-1k}=0$ ($k=0,\pm1,\pm2,\ldots$). Решение уравнения (1), удовлетворяющее указанному граничному условию и начальному условию: $u_{0k}=\delta_{k\alpha}$, где α — какое-либо целое число, обозначается через $P_{jk}(\alpha;\lambda)$. Если $|k-\alpha|\leqslant j$, то $P_{jk}(\alpha;\lambda)$ есть многочлен от λ степени $j-|k-\alpha|$; если же $|k-\alpha|>j$, то $P_{jk}(\alpha;\lambda)\equiv 0$.

Бесконечная эрмитовая матрица-функция $T(\lambda)=\|\tau_{\alpha\beta}(\lambda)\|_{-\infty}^{\infty}$ аргумента $\lambda\in(-\infty,\infty)$ называется матричной функцией распределения, если $T(\lambda-0)=T(\lambda)$, $T(0)=0$ и для любых комплексных ξ_α ($\alpha=0,\pm1,\pm2,\ldots$) и любого $n=0,1,2,\ldots$ эрмитова форма

$$\sum_{\alpha,\beta=-n}^{n}\tau_{\alpha\beta}(\lambda)\,\xi_\alpha\overline{\xi_\beta}$$

есть неубывающая функция λ. Устанавливаются теоремы:

1. Уравнению (1) всегда соответствует по крайней мере одна спектральная матрица $T(\lambda)$, т. е. матричная функция распределения $T(\lambda)$ Δ такая, что

$$\sum_{\alpha,\beta=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}P_{jk}(\alpha;\lambda)\,P_{j_1k_1}(\beta;\lambda)\,d\tau_{\alpha\beta}(\lambda)=\delta_{jj_1}\delta_{kk_1}. \quad (2)$$

2. Спектральная матрица $T(\lambda)$ единственна в том и только в том случае, когда хотя бы для одного (а тогда и для любого) невещественного λ всякое решение уравнения (1) обладает свойством

$$\sum_{j,k}|u_{jk}|^2=\infty.$$

3. Уравнение (1) вполне определяется любой своей спектральной матрицей $T(\lambda)$.

Пусть $T(\lambda)=\|\tau_{\alpha\beta}(\lambda)\|_{-\infty}^{\infty}$ — некоторая матричная функция распределения, для которой

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^{2n}d\tau_{\alpha\alpha}(\lambda)<\infty$$

($n=0,1,2,\ldots$; $\alpha=0,\pm1,\pm2,\ldots$).

Указываются необходимые и достаточные условия того, чтобы $T(\lambda)$ было спектральной функцией некоторого уравнения (1). Эти условия сводятся к условиям возможности построения многочленов $P_{jk}(\alpha;\lambda)$ $(j=0,1,2,\ldots,\alpha,\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ степеней $j-|k-\alpha|$ (если $j-|k-\alpha|<0$, то $P_{jk}(\alpha;\lambda)$ полагается равным нулю), удовлетворяющих условию ортогональности (2).

В работе широко используются методы спектральной теории эрмитовых операторов и, в частности, метод направляющих функционалов (Крейн М. Г., Збірн. праць Ін-ту матем. АН УРСР, 1948, № 10, 83—105), который предварительно распространяется на случай эрмитовых операторов с бесконечным числом направляющих функционалов. *М. Г. Крейн*

5660. О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов. Л и в ш и ц М. С., Матем. сб., 1954, 34, № 1, 145—199

Работа посвящена вопросу приведения ограниченного несамосопряженного оператора в гильбертовом пространстве H при помощи унитарных преобразований к простейшему виду, представляющему собой аналог нормальной формы в случае конечной матрицы.

Изучаются операторы, принадлежащие классу $(i\Omega)$: оператор $A\in(i\Omega)$, если оператор $\operatorname{Im}(A)=(A-A^*)/2i$ вполне непрерывный со сходящейся суммой модулей собственных значений. Многообразия $\mathcal{E}_A=\operatorname{Im}(A)H$ и $G_A=H\ominus\overline{\mathcal{E}_A}$ инвариантны относительно оператора $\operatorname{Im}(A)$ и $\operatorname{Im}(A)G_A=0$. Если существует подпространство $D_A\subseteq G_A$, инвариантное относительно A, то $H\ominus D_A$ также инвариантно относительно A. Если $D_A=0$, то оператор A называется простым. Таким образом изучение любого оператора A сводится к изучению самосопряженного оператора, индуцированного на D_A и простого на $H\ominus D_A$.

Пусть $r=\dim\mathcal{E}_A$, $0<r\leqslant\infty$ (если $r=0$, то A — самосопряженный оператор); H_r — евклидово r-мерное пространство, если $r<\infty$, и гильбертово пространство l_2, если $r=\infty$; $\vec{H}_{\mathrm{I}}$ и $\vec{H}_{\mathrm{II}}$ — пространства всех вектор-функций $f(k)$ $(k=1,2,\ldots)$ и $f(x)$ $(0\leqslant x\leqslant l<\infty)$ соответственно, значения которых принадлежат H_r; $\vec{H}=\vec{H}_{\mathrm{I}}+\vec{H}_{\mathrm{II}}$ — пространство пар $f=\{f(k),f(x)\}$ со скалярным произведением

$$(f,g)=\sum_{k=1}^{\infty}f(k)\,g^*(k)+\int_0^l f(x)\,g^*(x)\,dx,$$

где fg^* — скалярное произведение в H_r; $\alpha(k)$ $(k=1,2,\ldots)$ и $\alpha(x)$ $(0\leqslant x\leqslant l)$ — неубывающие и ограниченные числовые функции, $\beta(k)$ $(k=1,2,\ldots)$ и $\beta(x)$ $(0\leqslant x\leqslant l)$ — эрмитовы неотрицательные матрицы порядка r, удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям. Треугольной моделью класса $(i\Omega)$ называется оператор $g=\vec{A}f$ $(f,g\in\vec{H})$, определяемый формулами

$$g=\{g(k),g(x)\},$$

$$g(k)=f(k)\left[\alpha(k)I+\frac{i}{2}\beta(k)\mathscr{J}\beta(k)\right]+$$

$$+i\sum_{j=k+1}^{\infty}f(j)\beta(j)\mathscr{J}\beta(k)+i\int_0^l f(t)\beta(t)\mathscr{J}\beta(k)\,dt,$$

$$g(x)=\alpha(x)f(x)+i\int_0^l f(t)\beta(t)\mathscr{J}\beta(x)\,dt,$$

где I — единичная матрица, а $\mathscr{J}=\|\pm\delta_{kj}\|$ — диагональная матрица порядка r, среди элементов которой $+1$ встречается столько раз, сколько положительных собственных значений имеет оператор $\operatorname{Im}(A)$, а -1 — столько раз, сколько у этого оператора отрицательных собственных значений.

Основной результат: для каждого оператора $A\in(i\Omega)$ можно построить треугольную модель $\vec{A}$ и унитарное преобразование U, отображающее $H\ominus D_A$ на $\vec{H}\ominus D_{\vec{A}}$ так, что $\vec{A}=UAU^{-1}$.

Устанавливается также унитарная эквивалентность резольвент операторов A и $\vec{A}$ и находится явный вид резольвенты $\vec{A}$. Показывается, что всякая невещественная точка спектра простого оператора — полюс его резольвенты. На основании возможности приведения оператора $A\in(i\Omega)$ к треугольной модели доказывается, что если $A\in(i\Omega)$, а $\operatorname{Im}(A)$ — положительный оператор ($(\operatorname{Im}(A)x,x)\geqslant0$, $x\in H$), то

$$\sum_{j=1}^{\infty}\operatorname{Im}(\lambda_j)\leqslant\operatorname{Sp}\operatorname{Im}(A)\qquad(1)$$

(λ_j — собственные значения оператора A, $\operatorname{Im}(\lambda_j)\geqslant0$, Sp — след оператора) и что система конечномерных инвариантных подпространств, отвечающих невещественным собственным значениям простого оператора A, полна в пространстве H тогда и только тогда, когда в соотношении (1) имеет место знак равенства. В частности, эта теорема применяется к исследованию полноты системы главных функций ядра интегрального оператора в области его значений и полноты системы конечномерных инвариантных подпространств дифференциального оператора

$$L(y)=\sum_{k=0}^{m}P_k(x)\frac{d^ky}{dx^k}$$

$$(P_m(x)\neq0,\quad m\geqslant2,\ a\leqslant x\leqslant b)$$

с непрерывными коэффициентами и неособенными граничными условиями $u_i(y)=0$ $(i=1,\ldots,m)$ в пространстве $L_2(a,b)$. *Д. Ф. Харазов*

5661. Обобщенные резольвенты симметрических операторов. Ш т р а у с А. В., Изв. АН СССР, сер. матем., 1954, 18, № 1, 51—86

Обобщенной резольвентой замкнутого симметрического оператора A называется семейство ограниченных операторов R_λ, $\operatorname{Im}\lambda\neq0$, определенное формулой

$$R_\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dE_t}{t-\lambda},\qquad(1)$$

где E_t, $-\infty < t < \infty$, — произвольная спектральная функция оператора A. Выясняются условия, при которых заданное семейство R_λ является обобщенной резольвентой некоторого симметрического оператора, а также дается общая формула для обобщенных резольвент.

Основные результаты:

1. Семейство R_λ, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, ограниченных операторов в унитарном пространстве H является обобщенной резольвентой некоторого замкнутого симметрического оператора A с дефектным числом m в полуплоскости Π (и с необязательно плотной областью определения) тогда и только тогда, когда:

а) Для некоторого $\lambda_0 \in \Pi$, $\operatorname{Im}\lambda_0 \neq 0$, существует подпространство $L \subset H$ такое, что: а) $\dim(H \ominus L) = m$; б) $R_\mu f - R_{\lambda_0} f = (\mu - \lambda_0) R_\mu R_{\lambda_0} f$ для любого $f \in L$ и любого невещественного μ; в) $\| R_\lambda \psi \|^2 \leqslant \operatorname{Im}(R_\lambda \psi, \psi)/\tau$, $\tau = \operatorname{Im}\lambda$, для любого $\psi \in H \ominus L$ и любого невещественного $\lambda \in \Pi$; г) $R_\lambda \psi$ есть регулярная функция от $\lambda \in \Pi$ для любого $\psi \in H \ominus L$; д) существует последовательность $\lambda_n = \sigma_n + i\tau_n$, $\tau_n \neq 0$, удовлетворяющая условиям

$$\lim \lambda_n = \infty, \quad \sup |\sigma_n / \tau_n| < +\infty \tag{2}$$

и такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n (R_{\lambda_n}\varphi, \varphi) = -(\varphi, \varphi)$ для любого $\varphi \in H \ominus R_{\lambda_0} L$.

2. $R_\lambda^* = R_{\bar\lambda}$ для любого невещественного $\lambda \in \Pi$. R_λ является обобщенной резольвентой замкнутого симметрического оператора A с дефектным числом m и плотной областью определения тогда и только тогда, когда выполняются условия 1 а), б), в), г), (2), а также условие $\overline{R_{\lambda_0} L} = H$. Кроме того, выясняются условия, при которых этот оператор A максимален, а также условия, при которых R_λ есть резольвента данного симметрического оператора.

Совокупность всех обобщенных резольвент замкнутого симметрического оператора A определяется формулой

$$R_\lambda = (A_{F(\lambda)} - \lambda E)^{-1}, \quad \operatorname{Im}\lambda \operatorname{Im}\lambda_0 > 0, \tag{3}$$

где $F(\lambda)$ пробегает все операторные функции, по норме не превосходящие единицу, регулярные в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda \cdot \operatorname{Im}\lambda_0 > 0$ и отображающие дефектное подпространство $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ оператора A в дефектное подпространство $\mathfrak{N}_{\bar\lambda_0}$; при этом $A_{F(\lambda)}$ обозначает расширение (вообще несамосопряженное) оператора A, естественным образом определяемое этим отображением.

Формула (3) обобщает формулы, полученные ранее М. Г. Крейном (Докл. АН СССР, 1944, **43**, № 8, 339—342; 1946, **52**, № 8, 657—660) и референтом (Изв. АН СССР, сер. матем., 1943, **7**, 285—296). Теоремы 1 и 2 уточняют предыдущие результаты автора (Докл. АН СССР, 1949, **47**, № 4, 611—614; 1950, **70**, № 4, 557—580; **71**, № 2, 241—244; 1951, **78**, № 2, 217—220; 1952, **82**, № 2, 209—212); кроме того, значительно упрощены доказательства этих теорем. При доказательствах использованы результаты референта (Изв. АН СССР, сер. матем., 1940, **4**, 53—104, 277—318) и их обобщения на случай симметрического оператора с неплотной областью определения. *М. А. Наймарк*

5662. Об общем представлении линейных функционалов посредством «пара-аналитических» функций нескольких переменных. Фантапье (Su un'espressione generale dei funzionali lineari mediante le funzioni «para-analitiche» di più variabili. Fantappiè Luigi), Rend. Seminar mat. Univ. Padova, 1953, **22**, № 1,1—10 (итал.)

В работе рассматривается класс линейных аналитических функционалов, определяемых для аналитических в ограниченной замкнутой области A функций $f(z_1, \ldots, z_n)$, формулой

$$F[f(z_1, \ldots, z_n)] = \int\limits_{V_{2n-1}} \cdots \int f(z_1, \ldots, z_n)\, \omega_{2n-1}. \tag{1}$$

Здесь

$$\omega_{2n-1} = \sum_{r=1}^{2n} (-1)^{r-1} u_r dx_1 \ldots dx_{r-1} dx_{r+1} \ldots dx_{2n}$$

есть внешняя дифференциальная форма, определяющая функционал F; коэффициенты u_r этой формы предполагаются непрерывно дифференцируемыми в области $R_1 - A$ (R_1 — область, содержащая A); V_{2n-1} — ориентированная замкнутая поверхность, расположенная в области $2n$-мерного действительного пространства, соответствующей $R_1 - A$ по формулам $z_1 = x_1 + ix_{n+1}, \ldots, z_n = x_n + ix_{2n}$. Для неизменности представления (1) при замене V_{2n-1} поверхностью ей гомологичной в $R_1 - A$ должны выполняться соотношения

$$u_{n+r} = iu_r \ (r = 1, 2, \ldots, n)$$

и

$$\sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial u_r}{\partial x_r} + i \frac{\partial u_r}{\partial x_{n+r}} \right) = 0. \tag{2}$$

Автор называет вектор-функцию $(u_1, \ldots, u_n)$ пара-аналитической функцией $(z_1, \ldots, z_n)$, если выполнено равенство (2). Множество пара-аналитических функций в некоторой области есть модуль, для которого аналитические функции являются мультипликаторами. Для двух пара-аналитических функций u, v, компоненты которых дважды непрерывно дифференцируемы, устанавливается дистрибутивная операция

$$(u, v) = w; \ w_r = \sum_{j=1}^{n} u_j \left(\frac{\partial v_r}{\partial x_j} + i \frac{\partial v_r}{\partial x_{n+j}} \right) - \sum_{j=1}^{n} v_j \left(\frac{\partial u_r}{\partial x_j} + i \frac{\partial u_r}{\partial x_{n+j}} \right),$$

приводящая также к пара-аналитической функции; при этом

$$(u, v) = -(v, u), ((u, v), w) + ((v, w), u) + ((w, u), v) = 0.$$

Я. Б. Лопатинский

5663. О линейных слабо компактных отображениях пространств типа $C(K)$. Гротендик (Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$. Grothendieck A.), Canad. J. Math., 1953, 5, № 2, 129—173 (франц.)

Линейное отображение линейного топологического локально выпуклого пространства E на такое же пространство F называется слабо компактным, если оно переводит каждое ограниченное множество в слабо компактное. Дэнфорд и Петтис (Dunford N., Pettis J., Trans. Amer. Math. Soc., 1940, 47, 323—392) показали, что всякое слабо компактное отображение пространства L_1 интегрируемых функций на n-мерном кубе в любое нормированное пространство F компактно, т. е. преобразует всякое слабо компактное множество в компактное. Автор доказывает аналогичное предложение для пространства $L_1(K)$ на компакте с мерой Радона и для соответствующего пространства непрерывных функций $C(K)$, а также и для некоторых других пространств (заведомо нерефлексивных). В частности, указанное предложение справедливо для любого линейного непрерывного отображения пространства типа $C(K)$ на пространство типа $L_1(K)$, которое, как показывает автор, всегда является слабо компактным отображением. Слабо компактным является всегда также «интегральное» отображение $x \xrightarrow{v} y$ локально выпуклого пространства E на локально выпуклое F, когда справедлива формула

$$(vx, y') = \int (x, x')(y, y')\, d\mu(x', y)$$
$$(x \in E, x' \in E', y \in F, y' \in F').$$

Если E и F нормированы и одно из них рефлексивно, то «интегральное» отображение компактно.

Приводятся следующие (эквивалентные) критерии слабой компактности ограниченного множества A мер Радона, определенных и ограниченных на локально компактном пространстве M:

1) для любой последовательности функций f_n, измеримых по всякой мере $\mu \in A$, и сходящейся в каждой точке (или по всякой мере $\mu \in A$ на любом компакте $K \subset M$) выполняется предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu$$

равномерно для всех $\mu \in A$;

2) для всякой последовательности f_n, слабо сходящейся к нулю в $C_0(M)$ (пространство непрерывных функций, имеющих нуль в бесконечности)

$$\lim \int f_n d\mu = 0$$

равномерно для всех $\mu \in A$;

3) для всякой дизъюнктной последовательности областей O_n $\lim \mu O_n = 0$ равномерно по $\mu \in A$.

Отдельно рассматриваются случаи, когда компакт K «стоуновский» (замыкание каждой области есть область) или гомеоморфен сходящейся последовательности точек. *Г. Е. Шилов*

5664. Обобщенные пределы и средние. Сикорский (Generalized limits and means. Sikorski R.), Roczn. Polskiego towarz. mat. (Ann. Soc. Polon. math.), 1952, 25, 106—109 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Полугруппа G разрешима, если существует такая цепочка $e = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_n = G$ подполугрупп, что 1) для любых $\varphi \in G_i$, $\psi \in G_{i-1}$ уравнение $\psi^*\varphi = \varphi\psi$ разрешимо в G_{i-1}, 2) для любых $\varphi, \psi \in G_i$ уравнение $\varphi\psi = \psi^*\psi\varphi$ разрешимо в G_{i-1}. Пусть G — разрешимая полугруппа преобразований абстрактного множества T в себя и $\{f\}$ — совокупность отображений T в линейные топологические пространства, для которых бикомпактна замкнутая выпуклая оболочка $f(T)$ (она обозначается далее как $K(f)$). Тогда каждому f соответствует отображение $\Phi(f, t)$, $t \in T$, множества T в соответствующее линейное топологическое пространство, причем:
1) $\Phi(f, t) = \Phi(f, \varphi(t)) = \Phi(f\varphi, t)$ при всех $t \in T$, $\varphi \in G$,
2) $\Phi(f, t) \in K(f\varphi)$ при всех $\varphi \in G$,
3) если F — непрерывное линейное отображение $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ в Y ($X_1, X_2, \ldots, X_n$, Y — линейные топологические пространства) и если $[f_1, f_2, \ldots, f_n]$ — отображение T в X, соответствующее отображениям f_i множества T в X_i, то

$$\Phi(F[f_1, \ldots, f_n], t) = F(\Phi(f_1, t), \ldots, \Phi(f_n, t)).$$

В частности, если для любых t_1, $t_2 \in T$ найдутся такие $\varphi_1, \varphi_2 \in G$, что $\varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_2)$, то $\Phi(f) = \Phi(f, t)$ не зависит от t и является функционалом на множестве отображений $\{f\}$, обладающим основными свойствами обобщенного среднего относительно полугруппы преобразований G. *Н. Я. Виленкин*

5665. Исправление к статье «Некоммутативное обобщение абстрактного интегрирования». Сигал (Correction to «A non-commutative extension of abstract integration». Segal I. E.), Ann. Math., 1953, 58, № 3, 595—596 (англ.)

Автор указывает, что в его статье «Некоммутативное обобщение абстрактного интегрирования» (РЖМат, 1954, 1713) леммы 12.1 и 12.2 надо заменить следующими леммами, подробное доказательство которых приводится:

Лемма 12.1. Если P — оператор проектирования в конечном кольце $\mathfrak{A}$ такой, что $2^{-n-1}d(1) \leqslant d(P) \leqslant 2^{-n}d(1)$, то в $\mathfrak{A}$ существуют взаимно ортогональные операторы проектирования $P_1, P_2, \ldots, P_r$, где $r = 2^n$ такие, что $1 - \Sigma_j P_j \lesssim \Sigma_j P_j$. При этом $d(P)$ обозначает относительную размерность в $\mathfrak{A}$.

Лемма 12.2. Если оператор 1 интегрируем, то он m-конечен и $m(1)$ равно интегралу оператора 1.

Лемма 12.3. Если оператор проектирования P интегрируем, то P m-конечен и $m(P)$ равно интегралу оператора P. *М. А. Наймарк*

5666. Свойства уравнения Сальпетера — Бете для системы двух нуклонов. Голдстейн (Properties of the Salpeter — Bethe two-nucleon equation. Goldstein Jack S.), Phys. Rev., 1953, 91, № 6, 1516—1524 (англ.)

Релятивистское волновое уравнение, описывающее связанное состояние системы двух нуклонов (в дальнейшем будем называть его SB-уравнением), было получено различными способами в работах ряда авторов.

Однако до настоящего времени применение SB-уравнения не привело к существенным результатам, так как, во-первых, физический смысл волновой функции, определяемой этим уравнением, остается неясным и, во вторых, не было разработано эффективных методов решения этого уравнения (в некоторых работах использовалось приближенное решение, однако характер этих приближений не вполне ясен). В реферируемой работе при известных ограничениях дается точное решение SB-уравнения. Хотя это решение и не находит непосредственного физического применения, все же оно проливает некоторый свет на трудности, связанные с физической интерпретацией SB-уравнения.

Если учитывать взаимодействие нуклонов через мезонное поле в первом неисчезающем приближении (в смысле разложения в ряд по степеням константы связи g), то SB-уравнение в пространстве импульсов может быть преобразовано к виду

$$(E\beta + p_\mu\gamma_\mu - m_a)\,\Phi(p)\,(E\beta - p_\mu\gamma_\mu - m_b) = \\ = i\lambda'\pi^{-2}\int\frac{d^4k\rho\Phi(k)\,\rho}{(p-k)^2-\varkappa^2}\,, \qquad (1)$$

где $\Phi(k)$—16-компонентная волновая функция, записанная в виде матрицы 4-го порядка, β,γ_μ — матрицы Дирака, $2E$ — энергия в системе координат, где центр масс покоится, p_μ, k_μ — 4-векторы относительного импульса двух нуклонов, m_a, m_b, $\varkappa$ — массы нуклонов a и b и мезона, $\lambda' = g^2/4\pi$. Матрица ρ зависит от характера взаимодействия между нуклонным и мезонным полями (для скалярного взаимодействия $\rho=1$ и т. д.). Уравнение (1) решается при следующих условиях: 1) $E=0$, 2) $m_a = m_b = m$, 3) $\varkappa = 0$, 4) $\Phi = I\varphi(k^2)$, где $\varphi(k^2)$ — скалярная функция, зависящая только от k^2, а I — единичная матрица. Уравнение (1) при этом приводится к виду

$$(p^2-m^2)\,\varphi(p^2) = -i\lambda\pi^{-2}\int\frac{d^4k\varphi(k^2)}{(p-k)^2}\,. \qquad (2)$$

Здесь $\lambda = \lambda'\rho^2$ (ρ^2 — число).

Предполагая, что решение уравнения (2) допускает интегральное представление вида

$$\varphi(p^2) = \iint\limits_T dxdy\,g(x,y)\,(p^2 - x^{-1} + y + i\varepsilon)^{-2}, \qquad (3)$$

где интегрирование распространено на некоторую область T, а ε — положительная бесконечно малая величина (возможность представления (3) проверяется затем непосредственным вычислением), автор показывает, что $\varphi(p^2)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2}{ds^2}[s(s-1)\varphi(s)] + \lambda\varphi(s) = 0\ldots \qquad (4)$$

Решение уравнения (4) с учетом граничных условий, вытекающих из интегрального уравнения (3), может быть выражено через гипергеометрические функции. Оно существует при любом $g^2>0$, что свидетельствует о необходимости наложить дополнительно некоторые условия на волновую функцию, чтобы задача стала физически осмысленной. В качестве одного из таких условий автор предлагает условие нормируемости волновой функции на пространственно подобной поверхности (в координатном пространстве). Однако это условие запрещает лишь достаточно малые значения g^2. В заключительном параграфе автор предлагает условие, сводящее спектр допустимых значений g^2 к одной точке. *Ю. А. Гольфанд*

5667 Д. Вопросы спектральной теории, связанные с системой дифференциальных уравнений второго порядка. Лидский В. Б. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, Москва, 1954

См. также: 5524, 5541

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

5668. Об одном свойстве закона Гаусса — Лапласа. Лукач (Sur une propriété de la loi de Gauss—Laplace. Lukas Eugène), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 4, 444—445 (франц.)

Рассматривается система измеримых функций $g_s(x_1,\ldots,x_n)$ от n переменных $x_1,\ldots,x_n$, причем функции $g_s(x_1,\ldots,x_n)$ зависят только от разностей этих переменных. Система уравнений

$g_s(y_1,\ldots,y_{n-1},0) = z_s$ $(s=1,2,\ldots,n-1)$

должна иметь однозначные и измеримые решения:

$y_s = h_s(z_1,\ldots,z_{n-1})$ $(s=1,\ldots,n-1)$.

Пусть $X_1, X_2,\ldots, X_n$ — случайные независимые переменные. Пусть случайный вектор с компонентами $g_s(X_1,\ldots,X_n)$ $(s=1,2,\ldots,n-1)$ не зависит от суммы $\sum_{j=1}^{n} X_j$. Тогда все величины $X_1, X_2,\ldots, X_n$ нормальны и имеют одинаковую дисперсию.

Примечание референта. В силу условия, наложенного на функции $g_s(y_1,\ldots,y_{n-1},0)$, тривиальным образом выводится, что вектор с $n-1$ компонентами: $X_1 - X_n$, $X_2 - X_n,\ldots, X_{n-1} - X_n$ не зависит от $X_1 + \ldots + X_n$, так что все сводится к независимости линейных форм, и утверждение автора является тривиальным следствием теоремы В. П. Скитовича (РЖМат, 1953, 346). Более глубокие результаты о независимости от среднего нелинейных и даже неголоморфных статистик получены В. С. Паскевич (РЖМат, 1953, 1311). Кроме того, доказательство автора неполно: на стр. 445 ему приходится делить равенство на Ee^{itX_j}, но он не доказывает, что $Ee^{itX_j} \neq 0$. *Ю. В. Линник*

5669. Теория устойчивых законов распределения. Бергстрём (Eine Theorie der stabilen Verteilungsfunktionen. Bergström Harald), Arch. Math., 1953, **4**, № 5—6, 380—391 (нем.)

Автор определяет устойчивый закон распределения $G(x)$ как такой, для которого

$$G\left(\frac{x}{\sigma_1}\right) * G\left(\frac{x}{\sigma_2}\right) = G\left(\frac{x}{\sigma}\right), \qquad (1)$$

где σ_1 и σ_2 — любые положительные числа, σ зависит от σ_1 и σ_2, а $*$ обозначает знак свертки. Это определение уже общепринятого (оно исключает, например, несимметричные законы с $\alpha = 1$). Доказывается, что $\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha = \sigma^\alpha$ и что при надлежащей нормировке характеристическая функция $g(t)$ закона G имеет вид

$$g(t) = \begin{cases} e^{-t^\alpha (\cos\beta - i \sin\beta)} & \text{для } t > 0 \\ \overline{g(-t)} & \text{для } t < 0. \end{cases}$$

Далее доказывается, что условия $0 < \alpha \leqslant 2$; $\left|\sin\beta \cos\frac{\pi}{2}\alpha\right| \leqslant \left|\cos\beta \sin\frac{\pi}{2}\alpha\right|$; $\cos\beta > 0$ являются необходимыми и достаточными для того, чтобы $g(t)$ была характеристической функцией невырожденного распределения. Все это не представляет ничего нового в теории устойчивых законов. Интересны приведенные в работе разложения для плотности устойчивого закона с характеристической функцией $g(t)$:

$$G'(x) = -\frac{1}{\pi x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha k + 1)}{k! |x|^{k\alpha}} \times$$
$$\times \sin k\left(\frac{\alpha\pi}{2} + \beta - \alpha \arg x\right);$$
$$\alpha < 1;\ \arg x = \pi \text{ при } x < 0,$$
$$G'(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{\alpha}\right)}{\alpha k!} x^k \times$$
$$\times \cos\left[k\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{\alpha}\right) + \frac{\beta}{\alpha}\right];\ \alpha > 1.$$

Эти разложения получены впервые автором в работе «On some expansions of stable distribution functions» (Arkiv mat., 1952, **2**, № 4, 375—378).

А. В. Скороход

5670. Об одной теореме А. Н. Колмогорова. Гихман И. И., Наукові зап. Київськ. держ. ун-та, 1953, **12**, № 6, 75—94

Дается обобщение результатов А. Н. Колмогорова (Изв. АН СССР, сер. физ.-матем., 1931, 959; 1933, 363), относящихся к поведению в целом последовательности сумм независимых бесконечно малых случайных величин, на случай, когда этой последовательности в пределе соответствует некоторый разрывный случайный процесс с независимыми приращениями или же «смешанный» (имеющий непрерывную часть) процесс.

Пусть $f_1(t)$, $f_2(t)$ — непрерывные функции на сегменте $[0, 1]$, $f_1(0) < 0 < f_2(0)$.

При некоторых предположениях относительно указанных функций и последовательности серий независимых случайных величин

$$\xi_{n,1}, \xi_{n,2}, \ldots, \xi_{n,k_n} \qquad (1)$$

в работе доказывается, что вероятность одновременного осуществления событий

$$f_1(t_{n,m}) < \sum_{k=1}^{m} \xi_{n,k} < f_2(t_{n,m}),\ m = 0, 1, 2, \ldots, k_n$$
$$\left(\sum_1^0 = 0,\ 0 = t_{n,0} < t_{n,1} < \ldots < t_{n,k_n} = 1\right),$$
$$c < \sum_{k=1}^{k_n} \xi_{n,k} < d,\ f_1(1) < c < d < f_2(1)$$

при $n \to \infty$ сходится: 1) к $v(0, 0)$, где $v(t, s)$ есть решение интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{\partial v(t, s)}{\partial t} =$$
$$= w(t)\left[v(t, s) - \int_{f_1(t)-s}^{f_2(t)-s} v(t, s+x)\, d_x \Phi(t, x)\right],$$

обращающееся при $t = 1$ в

$$\psi(s) = \begin{cases} 1, & s \in (c, d), \\ 0, & s \notin (c, d); \end{cases}$$

2) к $u(0, 0)$, где $u(t, s)$ есть решение интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(t)\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2} b(t) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} +$$
$$+ w(t)\left[\int_{f_1(t)}^{f_2(t)} u(t, z)\, d_z \Phi(t, z-s) - u(t, s)\right] = 0$$

при граничных условиях

$$u(t, f_1(t)) = u(t, f_2(t)) = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant 1,$$
$$u(1, s) = \begin{cases} 1, & s \in (c, d), \\ 0, & s \notin (c, d). \end{cases}$$

Здесь функции $a(t)$, $b(t)$, $w(t)$, $\Phi(t, x)$ и последовательность разбиений отрезка $[0, 1]$ точками $t_{n,m}$ определяются из условий, налагаемых на последовательность серий (1).

Метод доказательства основан на использовании верхних и нижних функций. *В. С. Королюк*

5671. Изменение знака сумм случайных величин. Эрдёш, Хант (Changes of sign of sums of random variables. Erdös P., Hunt G. A.), Pacif. J. Math., 1953, **3**, № 4, 673—687 (англ.)

Пусть $\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_n, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин с одинаковыми симметричными и непрерывными распределениями (авторы указывают, что переход к дискретным распределениям вносит лишь несущественные изменения в формулировки и доказательства). Пусть $s_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ и N_n — число перемен знаков в последовательности $s_1, \ldots, s_n$, т. е. число индексов i, при которых $s_i s_{i+1} < 0$, $i + 1 \leqslant n$.

Показывается, что с вероятностью 1 $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{N_n}{\ln n} \geqslant \frac{1}{2}$. Строится пример, в котором с вероятностью 1 $\lim \frac{N_n}{\ln n} = \frac{1}{2}$. Высказывается гипотеза, что $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{N_n}{(n \log\log n)^{1/2}} \leqslant 1$ с вероятностью 1. Для случая, когда ξ_i равно ± 1 с вероятностями $1/2$, Чжун и Хант (Chung Kai Lai, Hunt G. A., Ann. Math., 1949, 50, 385—400) показали, что эта гипотеза верна с неравенством, замененным на равенство. Изучается число перемен знака в некоторых подпоследовательностях последовательности $\{s_n\}$. Например, если N'_k — число перемен знака в последовательности $s_1, s_2, s_4, \ldots, s_{2^k}$, то с вероятностью 1 $\lim_{k\to\infty} \frac{N'_k}{k} = \frac{1}{4}$.

Доказывается, что с вероятностью 1 $\sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sign} s_k}{k} = o(\log n)$.

В случае, когда ξ_i равно ± 1 с вероятностями $1/2$, это было установлено Леви (Lévy P., Théorie de l'addition des variables aléatoires, Paris, 1937).

Находятся в явном виде функции $\varphi(n)$ и $\psi(n)$ такие, что $\varphi(n) \leqslant M(N_n) \leqslant \psi(n)$ и асимптотически $\varphi(n) \sim \frac{\ln n}{2}$, $\psi(n) \sim \sqrt{\frac{n}{2\pi}}$. Вопрос о точности оценок $\varphi(n)$ и $\psi(n)$ не обсуждается.

Р. Л. Добрушин

5672. Исправление к тексту ранее опубликованной статьи автора. Леви (Rectification au texte d'une note antérieure. Lévy Paul), C. r. Acad. sci., 1953, 237, № 17, 964 (франц.)

Исправление неточности в статье (РЖМат, 1954, 2643).

5673. Распределение ошибок, вызванных округлением скользящих средних. Гринвуд, Глисон (Distribution of round-off errors for running averages. Greenwood R. E., Gleason A. M.), Pacif. J. Math., 1953, 3, № 3, 605—611 (англ.)

Пусть два противника встречаются в матче, состоящем из последовательности одинаковых игр, и G_n обозначает количество очков (целое число), набранных первым противником в n-ой игре. Шансы сторон оценивают посредством скользящих средних S_n, определяемых рекуррентной формулой

$$S_{n+1} = \frac{(k-1)S_n + G_{n+1}}{k},$$

где k — целое число. Для удобства S_{n+1} каждый раз заменяют целым числом T_{n+1}, ближайшим к $[(k-1)T_n + G_{n+1}]/k$. Если существуют два таких целых числа, то либо берут большее из них (случай 1), либо производят случайный выбор с вероятностями $p = q = 1/2$ (случай 2). Заметка посвящена изучению возникающей при этом ошибки $E_n = T_n - S_n$. Авторы показывают, что если $|E_n| \leqslant [k/2]$ при $n = n_0$, то это неравенство верно и при $n > n_0$. В предположении, что распределение дробной доли числа $[(k-1)T_n + G_{n+1}]/k$ не зависит от E_n и что все возможные значения этой дробной доли равновероятны, авторы находят предельные математическое ожидание и дисперсию E_n

$$ME = 0,\ DE = \frac{k^2-1}{12(2k-1)} \quad (k \text{ — нечетное}),$$

$$ME = \frac{1}{2},\quad DE = \frac{k^2-1}{12(2k-1)} \quad (k \text{ — четное, случай 1}),$$

$$ME = 0,\quad DE = \frac{k^2+2}{12(2k-1)} \quad (k \text{ — четное, случай 2}).$$

Для $k = 2$ авторы находят само предельное распределение ошибки, оказывающееся равномерным на $[0, 1]$ в случае 1 и треугольным на $[-1,1]$ в случае 2.

А. А. Юшкевич

5674. Исследование по теории совокупного риска. Случай равных страховых премий. Арведсон (Research in collective risk theory. The case of equal risk sums. Arfwedson G.), Skand. aktuarietidskr., 1953,№ 1—2, 1—15 (англ.)

Предполагается, что капитал, имеющийся в момент времени t в распоряжении страховой компании, равен $\zeta(t) = u + \lambda t - \xi(t)$, где $u = \zeta(0)$ — начальный капитал компании, λt — (неслучайная) сумма поступивших за время $(0, t)$ страховых взносов ($\lambda = \text{const}$) и случайная величина $\xi(t)$ — сумма выплаченных за время $(0, t)$ страховых премий, распределена по закону Пуассона с параметром t и шагом 1. Вероятность того, что компания не разорится за время $(0, T)$, определяется как

$$F(\lambda, u, T) = P\{\zeta(t) > 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}.$$

В реферируемой работе выводятся явные выражения для вероятности $F(\lambda, u, T)$. Например, показывается, что при целых m, n

$$F(1, m, n) = e^{-m} \sum_{i=0}^{n} \frac{(-i)^{n-i}}{(n-i)!} \frac{(m+i)^{m+i}}{(m+i)!}.$$

Исследуется асимптотическое поведение величины $F(\lambda, kx, x)$ при $k = \text{const}$, $x \to \infty$. Например, находится, что

$$1 - F(1, kx, x) \sim \frac{1+k-\alpha}{k(1-\alpha)} \frac{e^{-bx}}{\sqrt{2\pi(1+k)x}},$$

где $b = (1+k)\log(1+k) - k$ и $\alpha < 1+k$ — корень уравнения $e^{\alpha-1-k} = \alpha/(1+k)$.

Доказательства проводятся элементарными методами с использованием различных комбинаторных тождеств.

Р. Л. Добрушин

5675 К. Введение в теорию стохастических процессов, зависящих от непрерывного параметра. Манн (Introduction to the theory of stochastic processes depending on a continuous parameter. Mann Henry B., VI + 45 pp., National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, № 24, Washington, D. C., U. S. Government Printing Office, 1953, 30 с.) (англ.)

Автору удалось дать на 44 страницах цельное изложение теории стохастических процессов, сжатое и аккуратное, в котором учтены точки зрения физиков; при этом, правда, он ограничился лишь случаем процессов с непрерывным временем, реализации которых являются числовыми функциями (одного измерения), и теми свойствами этих процессов, которые вполне определяются временными законами распределения. Изложение является недостаточным в части, касающейся процессов Пуассона и процессов Маркова, теория которых, собственно говоря, почти не затрагивается. Формулировка следствия из леммы 1.7 на стр. 6 не совсем правильна.

Автор напоминает основные положения, касающиеся сходимости по вероятности случайных величин и анализа случайных функций (особенно функций второго порядка и их корреляционных функций); затем изучается функция Винера-Леви, описывающая классическое броуновское движение (которую автор называет основным случайным процессом) и получаемый из нее случайный процесс Орнштейна-Уленбека; при этом затрагиваются статистические проблемы, касающиеся последних двух типов процессов (проблемы оценок; работы Гренандера не упоминаются).

Автор останавливается на случайных функциях, с независимыми приращениями и на получаемых из них случайных функциях, а также на задачах, касающихся счетчиков Гейгера (работы В. Феллера), и заканчивает изложение гармоническим анализом функций Винера-Леви и стационарных функций второго порядка и законом больших чисел для последних. *R. Fortet*

Перевод из Math. Rev., 1953, **14**, № 7, 663.

Примечание редакции. Термин «Случайные процессы (функции) второго порядка» весьма распространен во французской литературе и означает функции, имеющие при всех значениях аргумента конечные моменты первого и второго порядка.

5676 К. Теория случайных функций. Т. I. Блан-Лапьер, Форте (Théorie des fonctions aléatoires. Vol. I. Blanc Lapierre André, Fortet Robert, Masson, Paris, 1953), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 23, 1579 (библ.)

5677 РЕЦ. Успехи в области теории вероятностей и теории предсказания временных рядов. Китакава (確率論及び推計學の進歩. 北川敏男編), 岩波書店, 180 стр. (Иванами сётэн), 1953, 530 иен [**Рецензия: Моригути** (森口繁), 科學 (Кагаку), 1953, **23**, № 9, 483—484 (япон.)]

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

5678. Заметка о факториальных моментах стандартных распределений. Потс (Note on the factorial moments of standard distributions. Potts R. B.), Austral. J. Phys., 1953, **6**, № 4, 498—499 (англ.)

Пусть $\varphi(x)$ — закон распределения дискретной случайной переменной. Факториальный момент r-го порядка этой переменной относительно начала равен

$$T(r) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(r+j)!}{j!} \varphi(r+j). \qquad (1)$$

Формула, обратная к (1), есть

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{x!j!} T(x+j). \qquad (2)$$

Сравнивая (2) с законами распределения дискретных переменных, можно определять факториальные моменты этих переменных.

Таким образом автор определяет факториальные моменты распределений биномиального, Пуассона, Пойа (Polya G.), гипергеометрического.

С. Х. Туманян

5679. О нецентральном t-распределении. Асорин (On the noncentral t distribution. Azorín F.), Rev. Acad. cienc. Madrid, 1952, **46**, 491—495 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (исп.)

Получено выражение для плотности нецентрального t-распределения через моменты усеченного нормального распределения. Используя совместное распределение числителя и знаменателя, автор находит моменты нецентрального t. Затем, применяя метод, употребленный Кертисом (Curtiss J. H., Ann. Math. Statistics, 1943, **14**, 107—122), автор отыскивал преобразования нецентрального t, которое было бы распределено приближенно нормально. Однако некоторые опечатки искажают здесь его вычисления. *C. C. Craig*

Перевод из Math. Rev., 1954, **15**, № 1, 46.

5680. Метод систематического выбора, основанный на свойствах порядка. Сандрум (A method of systematic sampling based on order properties. Sundrum R. M.), Biometrika, 1953, **40**, ч. 3—4, 452—456 (англ.)

Указывается на целесообразность экспериментального определения распределений некоторых статистик, точное вычисление которых сложно. Предлагается усовершенствовать метод случайного выбора применением систематического выбора с использованием свойств упорядоченных выборок. Свою мысль автор иллюстрирует на примере. Автор отмечает, что дать оценку теоретической точности предлагаемого метода не представляется возможным и в своем примере ограничивается сравнением с некоторыми известными результатами.

И. И. Гихман

5681. Порядковые критерии для проблемы двух выборок. Ван-дер-Варден (Order tests for the two-sample problem (2-nd communication). Van der Waerden B. L.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1953, **A56**, № 4, 303—310; Indagationes math., 1953, **15**, № 4, 303—310 (англ.)

Второе сообщение автора, посвященное выяснению сравнительной эффективности различных методов проверки гипотезы о принадлежности двух выборок объемов g и h одному и тому же непрерывному распределению вероятностей. (Первое со-

общение см. в том же журнале, 1952, А55, 453—458.) Предполагая законы распределения нормальными с одной и той же дисперсией и разностью центров μ, при альтернативных допущениях отличной от нуля, автор исследовал ранее эффективность критерия Уилкоксона (Wilcoxon F., Biometrics Bull., 1945, 1, 80) по сравнению с наиболее мощным в этих условиях критерием Стьюдента при частных допущениях: 1) $g=3$, $h=3{,}7$; 2) $g=1{,}2$, h велико. В настоящей заметке рассматриваются еще два случая: 3) $h \gg g \gg 1$; 4) g и h большие, g/h и h/g ограничены. В этих условиях эффективность критерия Уилкоксона (в смысле Фишера) асимптотически равна $3/\pi = 0{,}955$; таким образом, требуется в $\pi/3$ раза больше наблюдений для того, чтобы мощность этого критерия сравнялась с мощностью критерия Стьюдента. Непараметрические критерии — критерий, основанный на максимуме уклонения выборочных кривых распределения и, в особенности, критерий Вальда и Вольфовица, опирающийся на подсчет числа «серий» (runs), являются значительно менее эффективными в данных условиях.

Н. В. Смирнов

5682. Порядковые критерии для проблемы двух выборок. Ван-дер-Варден (Order tests for the two-sample problem (3-rd communication). Van der Waerden B. L.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1953, **A56**, № 4, 311—316; Indagationes math., 1953, **15**, № 4, 311—316 (англ.)

Продолжая исследование сравнительной мощности критериев для проблемы двух выборок (см. реф. 5681), автор дополнительно исследует частный случай $g=4$, $h=6$ при уровне значимости $\beta = 0{,}05$. При этом одно из распределений предполагается равномерным в отрезке $(0, 1)$, другое — равномерным в отрезке $(0{,}1+\mu)$, $\mu > 0$. Для этого случая оценивают мощность критерия Уилкоксона, X-критерия, построенного автором (РЖМат, 1954, 3030) и критерия Стьюдента.

В заключение автор делает ряд выводов о пригодности некоторых критериев в различных условиях их приложений.

Н. В. Смирнов

5683. Исследование функции мощности критерия Уилкоксона в случае ненормальных исходных распределений. Варт (An investigation on the power function of Wilcoxon's two sample test if the underlying distributions are not normal. Vaart H. R. van der), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1953, **A56**, № 5, 438—448; Indagationes math., 1953, **15**, № 5, 438—448 (англ.)

Пусть $x_1, \ldots, x_m$ и $y_1, \ldots, y_n$ — две взаимно независимые случайные выборки, взятые из совокупностей с непрерывными функциями распределения $F(x)$ и $G(x)$ соответственно. Уилкоксон (Wilcoxon F., Biometrics Bull., 1945, 1, 80) ввел критерий для проверки гипотезы $F(x) = G(x)$ для всех x, основанный на числе U пар (i, j), для которых $y_j < x_i$.

Пусть $\alpha > 0$ задано. В предположении, что функции $F(x)$ и $G(x)$ имеют непрерывные производные для всех значений x и

$$G(x) = F(x-\mu),$$

указываются следующие способы проверки гипотезы $\mu = 0$ в случае, когда конкурирующая гипотеза есть а) $\mu < 0$, б) $\mu > 0$, в) $\mu \neq 0$: в случае а) берется критическое множество вида $U \leqslant U_\alpha$, где U_α выбирается таким образом, чтобы вероятность ошибки первого рода не превосходила α; в случае б) берется критическое множество вида $U \geqslant mn - U_\alpha$; в случае с) критическое множество представляет сумму критических множеств в а) и б). Во всех трех случаях указываются точные выражения для функций мощности соответствующих критериев. Кроме того, изучается вопрос о смещении критерия U в случае асимметричного исходного распределения, когда этот критерий используется для проверки гипотезы $\mu = 0$ при противоположной гипотезе $\mu \neq 0$.

Е. Л. Рвачева

5684. Об использовании критериев, связанных с размахом, при сравнении малых выборок. Хиреniус (On the use of ranges, cross-ranges and extremes in comparing small samples. Hyrenius Hannes), J. Amer. Statist. Assoc., 1953, 48, № 263, 534—545 (англ.)

Пусть имеются две выборки объемов N_1 и N_2, причем u_1 и v_1 — соответственно наименьший и наибольший элементы в первой выборке, а u_2 и v_2 — соответственно наименьший и наибольший элементы во второй выборке. Выборки предполагаются занумерованными так, что $u_1 \leqslant u_2$. Рассматриваются величины

$$T = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - u_1}, \quad U = \frac{v_2 - u_2}{v_1 - u_1}, \quad V = \frac{v_2 - u_1}{v_1 - u_1}.$$

В предположении, что обе выборки производятся из одной и той же равномерно распределенной совокупности, находятся распределения величин T, U, V и их средние значения и дисперсии. Пусть при заданном p величины t_p, u_p, v_p определяются соотношениями $P(T > t_p) = p$, $P(U > u_p) = p$, $P(V > v_p) = p$. Приводятся таблицы, в которых для N_1, $N_2 = 2, \ldots, 10$ указаны значения t_p, соответствующие вероятностям $p = 0{,}10$; $0{,}05$; $0{,}01$, и значения u_p и v_p, соответствующие вероятностям $p = 0{,}995$; $0{,}975$; $0{,}95$; $0{,}05$; $0{,}025$; $0{,}005$. (В заголовке последнего столбца таблицы 2 вместо 0,5 следует читать 0,005.)

А. А. Петров

5685. Оценка параметров усеченных распределений Пирсона без применения высших моментов. Коэн (Estimating parameters in truncated Pearson frequency distributions without resort to higher moments. Cohen A. C., Jr), Biometrika, 1953, 40, ч. 1-2, 50—57 (англ.)

Рассматривается одномерная генеральная совокупность с функцией плотности, соответствующей одному из пирсоновских типов. Отыскиваются оценки для параметров. Производится выборка объема N. Затем исключаются из рассмотрения члены выборки, лежащие вне некоторого, заранее заданного интервала. В результате получается усеченная выборка (объема меньшего, чем N).

Измеряя выборочные значения от левого конца интервала, вычисляют первые четыре момента усеченной выборки.

Приводится система четырех уравнений, связывающих четыре первых момента усеченного распре-

деления относительно левого конца интервала и четыре искомых параметра.

В эти уравнения подставляют вместо моментов усеченного распределения моменты усеченной выборки. Решая систему, получают оценки для параметров.

Частный случай, когда известно, что функция плотности III типа, разобран более подробно.

Н. Н. Ченцов

5686. Оценка двух параметров из выборки. Холдейн (The estimation of two parameters from a sample, Haldane J. B. S.), Sankhyā, 1953, **12**, ч. 4, 313—320 (англ.)

Пусть генеральная совокупность разбита на $m > 3$ классов и $f_r(\xi, \eta)$ — вероятность попадания наблюдения в r-ый класс, где f_r — известная функция для всех r, а ξ и η — неизвестные параметры, подлежащие оценке. Пусть, далее, $x = \xi + p$ и $y = \eta + q$ — оценки для ξ и η по выборке объема N. Предлагается определять x и y из условия обращения в минимум величины $\sum_{r=1}^{m} \frac{[f_r(x, y)]^2}{n_r + 1}$, где n_r — число наблюдений, относящихся к r-му классу. Этот метод определения оценок в некоторых случаях проще метода максимума правдоподобия. Подсчитывается математическое ожидание величин p и q как в случае оценки методом максимума правдоподобия, так и в случае оценки предложенным методом с точностью до членов порядка N^{-2}.

Аналогичная задача для оценки одного неизвестного параметра была рассмотрена автором ранее (A class of efficient estimates of a parameter, Proc. Internat. Statist. Conf. India, 1951, 231—248).

С. Х. Туманян

5687. Функции мощности и относительная эффективность критерия знаков при нормальных альтернативах. Диксон (Power functions of the sign test and power efficiency for normal alternatives. Dixon W. J.), Ann. Math. Statistics, 1953, **24**, № 3, 467—473 (англ.)

Табулируется функция мощности критерия проверки равновероятности положительных и отрицательных уклонений для уровней значимости $\alpha = 0{,}01$ и $\alpha = 0{,}05$. Оценивается эффективность этого метода в применении к проверке гипотезы равенства средних двух нормальных генеральных совокупностей по сравнению с классическим t-критерием. Результаты вычислений показывают падение эффективности при возрастании объема выборки, уровня значимости и уклонения средних при альтернативных предположениях.

Н. В. Смирнов

5688. Критерии значимости для параллельности линий регрессии. Вильямс (Tests of significance for concurrent regression lines. Williams E. J.), Biometrika, 1953, **40**, ч. 3—4, 297—305 (англ.)

5689. Оценка параметров в процессе рождения и смерти. Моран (The estimation of the parameters of a birth and death process. Moran P. A. P.), J. Roy. Statist. Soc., 1953, **B15**, № 2, 241—245 (англ.)

Случайная точка блуждает по прямой, передвигаясь с вероятностью p на единицу вправо и с вероятностью q на единицу влево ($p + q = 1$). Начало координат — поглощающая точка. Пусть процесс блуждания начинается с точки n и наблюдается до момента поглощения, если поглощение происходит ранее момента времени N; в противном случае процесс наблюдается до момента времени N. В этих условиях для p даются оценка наибольшего правдоподобия $\hat{p}_1$ и несмещенная оценка $\hat{p}_2$. Отмечается, что при больших n и N оценка $\hat{p}_1$ не всегда имеет асимптотически нормальное распределение. К описанной схеме блуждания легко сводится процесс рождения и смерти.

Б. А. Севастьянов

5690. Оценка смещения коэффициента корреляции. Грант (Estimating the bias of correlation coefficients. Grant Alison M.), Indian J. Meteorol. and Geophys., 1953, **4**, № 4, 343—346 (англ.)

5691. Эффективность последовательной выборки для признаков. II. Практические применения. Хамакер (The efficiency of sequential sampling for attributes. Part II. Practical applications. Hamaker H. C.), Philips Res. Repts, 1953, **8**, № 6, 427—433 (англ.)

Указываются практические применения теории, развитой в первой части статьи (РЖМат, 1953, 838).

5692. Частотное обоснование последовательных критериев. (Дополнение). Барнард (The frequency justification of sequential tests — addendum. Barnard G. A.), Biometrika, 1953, **40**, ч. 3—4, 468—469 (англ.)

Дополнение к статье автора (Biometrika, 1952, **39**, 144).

5693. Об одном методе оценки всех контрастов в анализе дисперсии. Шеффе (A method for judging all contrasts in the analysis of variance. Scheffé Henry), Biometrika, 1953, **40**, ч. 1—2, 87—104 (англ.)

Основная задача работы — оценка контрастов (расхождений) истинных значений главных эффектов $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ в дисперсионном анализе; вопрос о такой оценке встает всякий раз, когда проверяемая гипотеза $H: \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$ бракуется применением обычных критериев. μ_i предполагаются несвязанными или связанными единственной связью $\sum_{i=1}^{i=k} h_i \mu_i = h$ (h_i, h — известные постоянные, $\sum_{i=1}^{k} h_i \neq 0$). Контрастом называется $\theta = \sum_{i=1}^{k} c_i \mu_i$; c_i — известные постоянные, $\sum_{i=1}^{i=k} c_i = 0$; гипотеза H эквивалентна утверждению, что все контрасты равны нулю одновременно.

Предполагается, что имеется совокупность статистик $\hat{\mu}_i$ и $\hat{\sigma}^2$ таких, что $M(\hat{\mu}_i) = \mu_i$, ковариация $(\hat{\mu}_i, \hat{\mu}_j) = a_{ij}\sigma^2$, где a_{ij} известны и σ^2 неизвестно,

причем $\hat{\mu}_i$ имеют многомерное нормальное распределение и независимы от $\hat{\sigma}^2$. Рассматривается случай неслучайных μ_i; $\hat{\sigma}^2$ — оценка σ^2 с ν степенями свободы ($\nu\hat{\sigma}^2/\sigma^2$ имеет распределение χ^2 с ν степенями свободы). Предполагается, что матрица $\| a_{ij}\sigma^2 \|$ имеет ранг k, если μ_i свободны, и ранг $k-1$, если они связаны указанной связью, причем принимается, что μ_i подчинены той же связи. Основной новый результат работы заключается в теореме:

Пусть $\hat{\theta} = \sum_1^k c_i\hat{\mu}_i$ — оценка контраста $\theta = \sum_1^k c_i\mu_i$ и $\sigma^2_{\hat{\theta}} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_{ij}c_ic_j\sigma^2$; пусть оценка этой дисперсии есть $\hat{\sigma}^2_{\hat{\theta}} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_{ij}c_ic_j\hat{\sigma}^2$. Пусть $S^2 = (k-1)\times$ $\times F_\alpha(k-1, \nu)$, где $F_\alpha(k-1, \nu)$ — верхняя α-точка распределения F с $k-1, \nu$ степенями свободы. Тогда с вероятностью $1-\alpha$ значения θ всех контрастов одновременно удовлетворяют неравенствам

$$\hat{\theta} - S\hat{\sigma}_{\hat{\theta}} \leqslant \theta \leqslant \hat{\theta} + S\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}, \qquad (1)$$

каковы бы ни были значения всех неизвестных параметров.

Эту теорему можно использовать для интервальной оценки всех интересующих нас контрастов, включая и те, для которых некоторые $\hat{\mu}_i$ выпадают (например, разности двух эффектов $\mu_i - \mu_k$). Какое бы число контрастов ни испытывалось при помощи (1), вероятность, что все сделанные утверждения будут правильны, будет $\geqslant 1-\alpha$.

Когда выбраны определенные c_i и рассматривается, таким образом, определенный контраст, можно сделать и о контрасте и о его оценке одно из следующих трех утверждений:

1) $\hat{\theta}$ отличается несущественно от нуля ($-S\hat{\sigma}_{\hat{\theta}} < \hat{\theta} < S\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}$);

2) θ существенно отличается от нуля и положительно ($\hat{\theta} \geqslant S\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}$);

3) $\hat{\theta}$ существенно отличается от нуля и отрицательно ($\hat{\theta} \leqslant -S\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}$).

В работе дается сравнение метода автора с аналогичным методом Тьюки (Tukey J. W., Proc. Fifth. Ann. Convention, Amer. Soc. Quality Control, 1951, 189—197); подробно рассматривается оперативная характеристика метода, дается доказательство (1) и различных формул, относящихся к оперативной характеристике и слишком сложных, чтобы поместить их здесь. *В. И. Романовский*

5694. Планирование и анализ треугольных блоков с однократной связью. Наир (Design and analysis of triangular singly linked blocks. Nair K. R.), Biometrics, 1953, 9, № 2, 141—156 (англ.)

Рассматривается особый вид частично сбалансированных неполных блоков, которые Бос и Шимамото назвали треугольными блоками с однократной связью. Примером плана с такими блоками может служить план:

Номер блока	Варианты опыта			
1	1	2	3	4
2	1	5	6	7
3	2	5	8	9
4	3	6	8	10
5	4	7	9	10

В нем число вариантов опыта 10 и каждые два ряда имеют только два одинаковых варианта опыта. Построение таких блоков видно из следующей схемы для 15 вариантов опыта:

*	1	2	3	4	5
1	*	6	7	8	9
2	6	*	10	11	12
3	7	10	*	13	14
4	8	11	13	*	15
5	9	12	14	15	*

Поле над диагональю (звездочки) заполняется по порядку вариантами опыта 1, 2, . . . , 15, как указано на схеме, а расположение вариантов опыта ниже диагонали представляет зеркальное отображение верхнего треугольника от диагонали. Автор дает подробный анализ результатов опыта для одного таким образом построенного блока и для повторения его несколько раз, сопровождаемый примером анализа 10 партий синтетического каучука различных марок по физическим свойствам его. Формулы автора слишком сложны, чтобы воспроизвести их в реферате. Они основаны на формулах работ автора (Biometrics, 1952, 8, 122—155; Sankhyā, 1944, 6, 383—390). *В. И. Романовский*

5695. Теорема вложения для планов с неполными сбалансированными блоками. Холл, Коннор (An embedding theorem for balanced incomplete block desings. Hall Marshall, Jr, Connor W. S.), Canad. J. Math., 1954, 6, № 1, 35—41 (англ.)

5696. Цепные блоки. Юден, Коннор (The chain block design. Youden W. J., Connor W. S.), Biometrics, 1953, 9, № 2, 127—140 (англ.)

Даются формулы анализа рассеяния для опытов, в которых часть вариантов имеет двукратную повторяемость (класс C_2), а часть — однократную (класс C_1).

Блоки			
1	2	3	. . . b
G_{2b}	G_{21}	G_{22}	. . . $G_{2(b-1)}$
G_{21}	G_{22}	G_{23}	. . . G_{2b}
G_{11}	G_{12}	G_{13}	. . . G_{1b}

Схема 1

Число вариантов в классе C_2 обозначается через v_2 и должно быть кратным числу блоков ($bn_2 = v_2$). План опыта дается схемой 1,

где G_{2j} обозначает группу из $n_2 \geqslant 1$ вариантов, испытываемых в двух повторениях, а G_{1j} — группу из n_{1j} вариантов, испытываемых в одном повторении каждый (вообще говоря, $n_{1j} \neq n_{1j'}$).

Блоки		
1	2	3
A	C	E
B	D	F
C	E	A
D	F	B
a	b	c
d	e	

Схема 2

Простейшим конкретным примером таких цепных блоков служит схема 2.

Анализ рассеяния проводится в соответствии с общим методом Фишера — Йейтса. Авторы указывают, что подобные схемы могут быть применимы в области физических наук, где остаточное рассеяние невелико. *М. И. Эйдельнант*

5697. **Многомерная теорема о полноте классов. Уэйсс** (A higher order complete class theorem. Weiss Lionel), Ann. Math. Statistics, 1953, **24**, № 4, 667—680 (англ.)

5698 **К.** **Упражнения по теоретической статистике. Кендалл** (Exercises in theoretical statistics. Kendall M. G., VII+179 pp., Griffin, 1954, 20 s.), Math. Gaz., 1954, **38**, № 323, 111 (библ.)

5699 **К.** **Статистические методы в сельском хозяйстве. Финни** (An introduction to statistical science in agriculture. Finney D. J., 179 pp., Oliver and Boyd, Ltd., Edinburgh and London, 1953, 25 s.), Nature, 1953, **172**, № 4378, VIII (библ.)

5700 **РЕЦ.** **Элементарное руководство по статистике. Баули** (An elementary manual of statistics. Bowley Arthur, IX + 297 pp., MacDonald and Evans, London, 1952, 10 s.) [**Рецензия: Бакленд** (Buckland W. R.), J. Roy. Statist. Soc., 1953, **A116**, ч. 1, 89—90 (англ.)]

5701 **РЕЦ.** **Теория и практика выборочного метода. Хаусен, Херунц, Мадоу** (Sample survey methods and theory. Hausen Morris H., Hurwitz William N., Madow William G. Vol. I, Methods and applications. 638 pp., 8.00 doll.; Vol. II, Theory, 332 pp., 7.00 doll., John Wiley and Sons, Inc., New York, 1953) [**Рецензия: Хаммер** (Hammer Carl), J. Franklin Inst., 1954, **257**, № 1, 71—72 (англ.)]

5702 **РЕЦ.** **Теория линейных оценок. Джамбунатхан** (The theory of linear estimation. Jambunathan M. V., VI + 84 pp., India Book Company, Bangalore, India, 1951, 3 Rs.) [**Рецензия: Мадоу** (Madow William G.), J. Amer. Statist. Assoc., 1953, **48**, № 263, 654—655 (англ.)]

5703 **РЕЦ.** **Введение в статистику. Кенуй** (Introductory statistics. Quenouille M. H., 248 pp., Butterworth-Springer, Ltd., London, 1950, 30 s.) [**Рецензия: Фереди** (Fereday F.), Brit. Coal Utilis. Res. Assoc., 1953, **17**, № 4, 168 (англ.)]

5704 **РЕЦ.** **Связанные измерения. Кенуй** (Associated measurements. Quenouille M. H., X + 242 pp., Butterworth, London, 1952, 35 s.) **Планирование и анализ экспериментов. Кенуй** (The design and analysis of experiment. Quenouille M. H., XIII + 356 pp., Griffin, London, 1953, 36 s.) [**Рецензия: Кокс** (Cox D. R.), Biometrika, 1953, **40**, ч. 3—4, 471—472 (англ.)]

5705 **РЕЦ.** **Статистические таблицы и задачи. Уо** (Statistical tables and problems. Waugh Albert E., XIV +242 pp., 3 ed., McGraw Hill, New York, London, 1952, 25 s. 6 d.) [**Рецензия: Токер** (Tocker K. D.), J. Roy. Statist. Soc., 1953, **A116**, ч. 3, 327—329 (англ.)]

5706 **РЕЦ.** **Элементы статистики. Лам** (Elements of statistics. Lambe C. G., VIII + + 112 pp., Longmans Green, London, 1952, 8s. 6d.) [**Рецензии: Сандон** (Sandon Frank), Math. Gas., 1953, **37**, № 321, 237; **Ньюман** (Newman D.), J. Roy. Statist. Soc., 1953, **A116**, ч. I, 90 (англ.)]

5707 **РЕЦ.** **Факты из цифр** (Вводный курс статистики). **Морони** (Facts from figures. Moroney M. J., 472 pp., Penguin Books Inc., Baltimore, Maryland, 1951, 1.25 doll.) [**Рецензия: Герпшик** (Girshick M. A.), J. Amer. Statist. Assoc., 1953, **48**, № 263, 645—647 (англ.)]

ТЕОРИЯ ИГР

5708. **Игры с точками равновесия. Оттер, Дани** (Games with equilibrium points. Otter Richard, Dunne John), Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1953, **39**, № 4, 310—314 (англ.)

Нейман (Neumann J. von, Morgenstern O., Theory of games and economic behavior, Princeton University Press, 1944, 112—128) показал, что игры с нулевой суммой в случае двух игроков (zero-sum two-person game) являются вполне определенными (strictly determined) при условии полной информации. Используя понятие точек равновесия, введенное Нашем (Nash J. F., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1950, **36**, 48—49). Кун (Kuhn H. W., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1950, **36**, 570—576) обобщил эту теорему на все конечные игры. В работе исследуются условия, при которых бесконечные игры являются вполне определенными; формулируется теорема, характеризующая такие игры структурно (приводится доказательство достаточности; указывается, что необходимость доказывается проще и представляет меньший интерес). *Г. Ш. Рубинштейн*

5709. **Проблема выигрыша в обобщенной теории игр без информации. Берж** (Le problème du gain dans la théorie généralisée des jeux sans informations. Berge Claude), Bull. Soc. math. France, 1953, **81**, № 1, 1—8 (франц.)

Пусть $X^* = \{x\}$ и $Y^* = \{y\}$ — множества позиций игроков A и B соответственно; $\tau = xy$ — позиция игры, из которой делает ход игрок A; $\tau' = yx$ —

позиция игры, из которой делает ход игрок B. Позиции x и y характеризуются своими структурами $\bar{x}=\sigma(x)$ и $\bar{y}=\sigma(y)$; $\bar{X}^*=\{\bar{x}\}$, $\bar{Y}^*=\{\bar{y}\}$. (Предполагается, что системы $\{\sigma^{-1}(z)\}_{z\in\bar{X}^*}$ и $\{\sigma^{-1}(z)\}_{z\in\bar{Y}^*}$ состоят из попарно непересекающихся множеств). Игрок A делает свой k-ый ход, зная свою позицию x_{k-1} и структуру позиции партнера $\bar{y}_{k-1}=\sigma(y_{k-1})$; при этом он выбирает свою позицию $x_k\in G(x_{k-1}\bar{y}_{k-1})$. Аналогично B выбирает $y_k\in G(\bar{x}_k y_{k-1})$ (G — заданы). Игра оканчивается после некоторого заранее фиксированного числа ходов N. На множестве позиций игры задана функция $f(\tau)$, показывающая выигрыш игрока A, когда игра оканчивается на позиции τ.

Обозначим через Λ пустое множество. Совокупность $D=\{Y^\alpha\}_\alpha$, удовлетворяющая условиям:

1) $Y^\alpha\neq\Lambda$; 2) $z\in\bar{Y}^*$, $Y^\alpha\cap\sigma^{-1}(z)\neq\Lambda$ влечет $Y^\alpha\subset\sigma^{-1}(z)$; 3) $Y^\alpha\cap Y^\beta=\Lambda$ при $\alpha\neq\beta$; 4) $\bigcup\limits_\alpha Y^\alpha=Y^*$,

называется схемой информации игрока A. При каждой позиции игры $\tau=xy$ игрок A знает $Y^\alpha\ni y$.

Если $D=\{Y\}$ — схема информации игрока A, то он делает ход при ситуации $t=xY$. Если игрок A заранее решил, как он будет играть при каждой возможной ситуации, то говорят, что A выбрал стратегию π: $\pi(xY)\in G(xY)$. Аналогично для игрока B: $\zeta(yX)\in G(\bar{X}y)$.

Говорят, что A может гарантировать в данной позиции выигрыш g, если для каждого $\varepsilon>0$ существует такая стратегия π, при которой он получит выигрыш больший, чем $g-\varepsilon$, независимо от стратегии ζ, выбранной B. Функция $g(t)$ называется ведущей функцией игрока A, если в каждой ситуации t A может гарантировать $g(t)$. Далее $h(t)=\sup g(t)$ — наибольший гарантированный выигрыш игрока A при ситуации t.

Проблема выигрыша состоит в определении $h(t)$, как функции D, f, G. Доказывается:

Теорема 1. Чтобы $g(xY)$ была ведущей функцией игрока A, необходимо и достаточно, чтобы

$$g(xY)\leq\sup_{x'\in G(x,Y)}\ \inf_{Y'\in D/G(\bar{x}',Y)} g(x'Y')$$

$$(D/Z=\{Z\cap Y^\alpha\}_\alpha), \qquad (1)$$

если ситуация $t=xY$ соответствует ходу $n<N$;

$$g(xY)\leq\inf_{y\in Y} f(x,y), \qquad (2)$$

если ситуация $t=xY$ соответствует ходу N.

Теорема 2. Чтобы $g(t)=h(t)$ (т. е., чтобы $g(t)$ было наибольшим гарантированным выигрышем игрока A), необходимо и достаточно, чтобы в соотношениях (1) и (2) достигалось равенство.

Выигрыш, гарантированный по началу, называется стоимостью игры. Пусть схема информации D' является подразделением схемы D; говорят, что D' более тонкая схема, чем D.

Теорема 3. Игра со схемой информации D' имеет не меньшую стоимость, чем игра со схемой информации D:

$$V(D')\geq V(D).$$

Схемы информации можно упорядочить по стоимости.

В теореме 4 дается выражение для стоимости игры при полном отсутствии информации ($D_1=\{\sigma^{-1}(z)\}_{z\in\bar{Y}^*}$) и стоимости игры при полной информации ($D_0=\{Y^\alpha\}$, где Y^α — одноэлементные множества).

В работе представляет интерес главным образом постановка вопроса. *Г. Ш. Рубинштейн*

5710 К. Теория игр и статистические разрешающие функции. Блэкуэлл, Гершик (Theory of games and statistical decisions. Blackwell D., Girshick M. A., 330 pp., John Wiley and Sons, Inc., New York, 1954, 7.00 doll.), Science, 1953, 118, № 3075, 22 (библ.)

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ТЕХНИКЕ

5711. Одномерные плотности вероятностей для приемников с квадратичными детекторами. Эмерсон (First probability densities for receivers with square law detectors. Emerson R. C.), J. Appl. Phys. (N. Y.), 1953, 24, № 9, 1168—1176 (англ.)

Работа примыкает к более ранней работе Каца и Зигерта (Kac M., Siegert A. J. F., J. Appl. Phys. (N.Y.), 1947, 18, № 4, 383—397) на аналогичную тему. Рассматривается система, состоящая из соединенных последовательно линейного фильтра (усилителя промежуточной частоты), характеризуемого переходной функцией $f_{if}(t)$ или ее преобразованием Фурье — частотной характеристикой $F_{if}(\omega)$, квадратичного детектора, осуществляющего возведение напряжения в квадрат, и второго линейного фильтра (усилителя низкой частоты) с переходной функцией $f_a(t)$ (частотной характеристикой $F_a(\omega)$). На вход системы подается напряжение $E_i(t)=S(t)+N(t)$, где $S(t)$ — сигнал, являющийся известной функцией времени, а $N(t)$ — «белый шум» с заданным средним квадратичным значением φ_0. Требуется определить плотность распределения вероятностей для напряжения $E_0(t)$ на выходе системы.

Для функции $E_0(t)$ легко получается формула

$$E_0(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E_i(t-u)\,g(u,v)\,E_i(t-v)\,du\,dv,$$

где ядро $g(u,v)$ просто выражается через известные функции $f_{if}(t)$ и $f_a(t)$. При некоторых условиях (например, если $f_a(t)\geq 0$) ядро $g(u,v)$ оказывается положительно определенным и может быть разложено в ряд

$$g(u,v)=\sum_j\frac{h_j(u)\,h_j(v)}{\lambda_j},$$

где λ_j и $h_j(u)$ — собственные значения и собственные функции интегрального уравнения с ядром $g(u,v)$. После этого для характеристической функции случайной величины $E_0(t)$ удается получить явную формулу, содержащую параметры φ_0, λ_j и

$s_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t-x)\, h_j(x)\, dx$; искомая плотность вероятности находится, как преобразование Фурье характеристической функции.

В случае, когда второй фильтр отсутствует (т. е. $f_a(t) = \delta(t)$), ядро $g(u, v)$ оказывается вырожденным: $g(u, v) = f_{if}(u) f_{if}(v)$, и указанный метод позволяет получить простую явную формулу для плотности распределения $E_0(t)$. В общем случае задача осложняется необходимостью нахождения собственных значений и собственных функций ядра $g(u, v)$. Оказывается, однако, что семиинварианты $E_0(t)$ просто выражаются через итерированные ядра $g^{(n)}(u, v)$, т. е. могут быть найдены с помощью простых квадратур без решения интегрального уравнения. После этого приближенное значение плотности распределения $E_0(t)$ можно получить, взяв достаточное число членов ее разложения в ряд Грама-Шарлье (т. е. разложения по функциям Чебышева-Эрмита); в некоторых случаях вместо этого удобнее воспользоваться разложением плотности в ряд по функциям Лагерра (коэффициенты этого ряда также выражаются через семиинварианты распределения).

В качестве примера приведены результаты, получающиеся в случае, когда частотные характеристики $F_{if}(\omega)$ и $F_a(\omega)$ обе имеют вид кривой Гаусса, а сигнал $S(t)$ или вовсе отсутствует, или же выражается формулой $S(t) = \sqrt{2S_0}\cos\omega_0 t$; для этого случая вычисления доведены до графиков, представляющих приближенные значения плотности вероятностей для различных значений отношения ширины полосы пропускания первого и второго фильтров и различных значений отношения интенсивности сигнала к интенсивности шума.

Дополнения к статье содержат некоторые детали вычислений, встретившихся при расчете примера, и обсуждение вопроса о возможности обнаружения сигнала на фоне шума, близкое к изложенному в книге «Пороговые сигналы» (пер. с англ. под ред. А. П. Сиверса, Изд-во «Советское радио», М., 1952). *А. М. Яглом*

5712. Статистические аспекты динамических нагрузок. Фын (Statistical aspects of dynamic loads. Fung Y. C.), J. Aeronaut. Sci., 1953, **20**, № 5, 317—330 (англ.)

Рассматриваются динамические задачи, в которых сила, действующая на систему, представляет собой случайный процесс с известными статистическими характеристиками. Отмечается, что подобные задачи возникают при попытке рассчитать нагрузки на самолет, связанные с воздействием порывов ветра, толчками при посадке или при подъеме с шероховатой поверхности и т. д. Кратко напоминаются основные теоретико-вероятностные понятия, необходимые при изучении случайных функций (понятия распределения вероятностей, моментов распределения, осреднения, корреляционной функции и спектральной плотности стационарного случайного процесса); приводится известное решение задачи о воздействии стационарной случайной силы на линейную систему, описываемую дифференциальным уравнением второго порядка. Далее рассматривается, следуя Липману (Liepmann H. W., J. Aeronaut. Sci., 1952, **19**, № 12, 793; русск. перевод в сборнике «Механика», Изд-во иностр. лит-ры, 1953, № 5), задача о воздействии атмосферной турбулентности на летящий самолет; в качестве спектральной плотности порывов ветра при этом берется выражение, найденное при исследовании изотропной турбулентности в аэродинамической трубе, а частотная характеристика самолета выбирается в соответствии с работой Сирса (Sears W. R., J. Aeronaut. Sci., 1941, 8, № 2, 104—108). Вычисления доводятся до получения явной формулы для среднего квадратичного значения ускорения самолета; отношение этого значения к среднему квадратичному значению порывов ветра представляется для данного самолета функцией от $S = b/L$ (b — длина хорды крыла, L — масштаб турбулентности), стремящейся к нулю при $s \to 0$ и при $s \to \infty$. Вслед за этим, следуя Хаузнеру (Housner G. W., Bull. Seismol. Soc. Amer., 1941, **31**, 143—149; 1947, **37**, 19—31), рассматривается задача об оценке максимального отклонения балки, закрепленной одним концом в стене, подверженной случайным ускорениям $a(t)$; приведенные здесь рассуждения весьма грубы и, повидимому, допускают дальнейшее уточнение. В заключение приводятся результаты о распределении вероятностей для максимального элемента выборки объема n из данной генеральной совокупности, содержащиеся в книге Г. Крамера («Математические методы статистики», Изд-во иностр. лит-ры, М., 1948), и обсуждается применение этих результатов к задаче о расчете ветровых нагрузок. *А. М. Яглом*

5713. Потери рабочего времени и разделение автоматических линий на участки. Владзиевский А. П., Станки и инструмент, 1953, № 10, 9—15

Пусть имеется автоматическая линия из m станков $A_1, A_2, \ldots, A_m$ одинаковой производительности и одинаково часто выходящих из строя, разделенных $m-1$ бункерами емкости в l штук изделий каждый. Если обозначить вероятность простоя i-го станка через P_{A_i} и пренебречь совместными поломками станков, то вероятность простоя линии при отсутствии бункеров (т. е. вероятность невыдачи готовой продукции в конце линии) равна $\prod = \sum_{i=1}^{m} P_{A_i} = mP_{A_1}$. Наличие бункеров снижает эту вероятность. Так, в случае $m = 2$ вероятность простоя линии можно представить в виде

$$\prod = P_{A_2} + \delta P_{A_1} = P_{A_1}(1+\delta), \qquad (1)$$

где $0 \leqslant \delta \leqslant 1$ некоторый коэффициент. В статье дается вывод формулы для δ

$$\delta = \frac{1}{1 + cl\tau/2} \qquad (2)$$

при помощи теории марковских процессов. При этом предполагается, что время ремонта станка имеет показательный закон распределения со средним $1/c$ (τ — время изготовления одного изделия). Автор производит следующее совершенно безосновательное обобщение формулы (1) на случай $m > 2$

$$\Pi = P_{A_1}[1 + (m-1)\delta],$$

причем δ здесь предлагается брать также из (2). *Б. А. Севастьянов*

5714. Корреляция и автокорреляция в технике связи. Мейер-Эплер (Korrelation und Autokorrelation in der Nachrichtentechnik. Meyer-Eppler Werner), Arch. elektr. Übertrag, 1953, 7, № 10, 501—504; № 11, 531—536 (нем.)

Краткий обзор основных понятий корреляционной теории и ее применений в теории связи. Библиография, 46 названий. *Я. Х.*

5715. Применение статистических методов при контроле качества, в частности — последовательного анализа при приемочном контроле. Штанге (Die Verwendung statistischer Verfahren bei der Qualitätskontrolle, insbesondere Folgeteste bei Abnahmeversuchen. Stange K.), Techn. Mitt., 1953, 46, № 4, 95—102 (нем.)

Элементарное изложение сущности метода последовательного анализа в его применении к приемочному контролю.

После весьма популярного, с примерами из области техники, описания понятий случайной величины и ее распределения излагаются теоретико-вероятностные основания приемочного контроля при помощи одной выборки фиксированного объема. В основной части статьи с минимальным использованием математического аппарата, но с достаточной для популярного изложения полнотой, выясняется существо последовательного анализа, как метода приемочного контроля с нефиксируемым заранее объемом выборки. В частности, выясняется роль параметров α и β (риск приемки и сдачи) и p_1 и p_2 (предельные значения доли брака в отвергаемых и принимаемых партиях), определяющих конкретную схему последовательного анализа. Рассмотрены характеристики принимаемой схемы: кривые, определяющие вероятность отвергнуть партию (оперативная характеристика) и математическое ожидание числа непосредственно контролируемых изделий в зависимости от фактической доли брака в партиях, предъявляемых для контроля.

Таблицы значений величин, необходимых для практического применения последовательного анализа при приемочном контроле, так же, как и формулы, позволяющие определить эти значения в зависимости от принятых значений α, β, p_1, p_2, в статье не приведены. *Г. И. Егудин*

5716. Разыскание и оценка несимметричности линейного и плоскостного эксцентриситета. Романовский В. И., Тр. Ин-та матем. и механики АН УзССР, 1953, № 11, 16—21

На отрезок AB с серединой M накладывается меньший отрезок CD с серединой M'. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — результаты n независимых измерений отрезка $AC = x$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — результаты n независимых измерений отрезка $DB = y$.

В качестве оценки для линейного эксцентриситета $e = MM' = (x - y)/2$ предлагается величина $e^* = (\bar{x} - \bar{y})/2$.

В случае, когда ошибки наблюдений распределены нормально со средним нуль и одной и той же дисперсией, для e указываются с помощью закона Стьюдента доверительные границы, соответствующие какому-либо уровню значимости α.

Аналогично решается задача об оценке эксцентричности расположения двух кругов. *Н. Н. Ченцов*

5717 К. Теория информации. Голдман (Information theory. Goldman Stanford, 385 pp., figs, Prentice-Hall, New York, 1953, 9.00 doll.), Engng J., 1953, 36, № 12, 1698 (библ.)

5718 К. Техническая статистика и контроль качества. Берр (Engineering statistics and quality control. Burr Irving W., XI + 442 pp., McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1953, 7.00 doll.), School Sci. and Math., 1953, 53, № 8, 666 (библ.)

5719 РЕЦ. Теория информации и ее технические приложения. Белл (Information theory and its engineering applications. Bell D. A., 138 pp., figs, Isaac Pitman and Sons Ltd., London, 1953, 20 s.) [**Рецензия: Крейвен** (Craven T. L.,), Electronic Engng, 1953, 25, № 308, 436 (англ.)]

См. также: 5431 РЕЦ

ГЕОМЕТРИЯ

5720. Международная конференция по дифференциальной геометрии. Инцингер (Internationales Symposium für Differentialgeometrie, Venedig — Padua — Bologna — Pisa, 20.— 26. September 1953, Inzinger R.), Internat. math. Nachr., 1953, 8, № 29/30, 11—12 (нем.)

Краткое сообщение о конференции по дифференциальной геометрии, посвященной 100-летию со дня рождения Риччи, 50-летию со дня смерти Кремоны и 25-летию со дня смерти Бианки.

5721. Международный коллоквиум по дифференциальной геометрии. Эресман (Colloque international de géométrie différentielle, Strasbourg, 26 Mai — 1 er Juin 1953. Ehresmann C.), Internat. math. Nachr., 1953, 8, № 29/30, 9 (франц.)

5722. Ограниченные модели евклидовой плоскости. I. Сжатые графики. Суэйн (Bounded models of the Euclidean plane. I. Condensed graphs. Swain R. L.), Amer. Math. Monthly, 1954, 61, № 1, 21—26 (англ.)

Плоскость (x, y) отображается на квадрат (x', y') функциями

$$x' = \frac{x}{1 + |x|}, \quad y' = \frac{y}{1 + |y|}.$$

Сторонам квадрата $x' = \pm 1$; $y' = \pm 1$ соответствуют точки плоскости, у которых по крайней мере одна из координат равна $+\infty$ или $-\infty$. Замкнутый квадрат автор называет сжатой плоскостью. Графику функции $y = f(x)$ на плоскости xy соответствует сжатый график на сжатой плоскости. Сжатый

график оказывается весьма удобным для исследования поведения функции на бесконечности.

Автор исследует элементарные вопросы анализа: нахождение асимптот, сходимость несобственных интегралов и рядов, и формулирует известные результаты в терминах, относящихся к сжатому графику соответствующей функции.

Например, для сходимости несобственного интеграла $\int_a^\infty f(x)\,dx$, где $f(x)\downarrow 0$ при $x\to\infty$, необходимо, чтобы сжатый график функции $y=f(x)$ касался оси абсцисс в точке $(+\infty, 0)$. Признак Гаусса для сходимости ряда получает новую формулировку. Пусть дан ряд с положительными членами $\sum_{i=0}^{\infty} u_i$, обозначим u_{n+1}/u_n через $r(n)$ и построим на сжатой плоскости точки $P_n[n, r(n)]$. Если при $n>N$ точки P_n расположены ниже кривой, оканчивающейся в точке $(+\infty, 1)$ и имеющей наклон больший $1/4$, то ряд сходится.

Рассмотрен также вопрос о свойствах функции $\Phi(t)$, при которых отображение $x'=\Phi(|x|)$, $y'=\Phi(|y|)$ плоскости на сжатую плоскость будет иметь аналогичные свойства. *А. В. Батырев*

5723. Ограниченные модели евклидовой плоскости. II. Круговая модель евклидовой плоскости. Ганс (Bounded models of the Euclidean plane. II. A circular model of the Euclidean plane. Gans David), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 1, 26—30 (англ.)

Предлагаются модели евклидовой и проективной плоскостей. Последняя является картой в ортографической проекции известной модели проективной плоскости на полусфере (Клейн, Неевклидова геометрия, М., 1936, 23). Если на этой карте отбросить граничную окружность, то получится предлагаемая в статье модель евклидовой плоскости. В этой модели точки интерпретируются как внутренние точки единичной окружности Г, прямые интерпретируются как диаметры круга Г и полуэллипсы (дуги эллипсов, опирающиеся на большие оси), большие оси которых совпадают с диаметрами круга Г. *А. Е. Либер*

5724. Ограниченные модели евклидовой плоскости. III. Использование сжатых графиков в аналитической геометрии. Мей (Bounded models of the Euclidean plane. III. The use of condensed graphs in analytic geometry. May K. O.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 1, 31—32 (англ.)

Рассматривается введенное в предыдущих частях той же статьи отображение евклидовой плоскости E_2 на круг C, при котором прямые $x=a$ и $y=b$ отображаются на полуэллипсы, большие оси которых являются диаметрами C. Координатные линии полярной системы E_2 изображаются концентрическими внутренними окружностями C и диаметрами C.

Указывается, как по характеру образов кривых в C судить об асимптотах кривых в E_2, их поведении «в бесконечности» и т. д. *Р. М. Гейдельман*

5725. Несколько определений конических сечений. Стока (Câteva definiţii ale conicelor. Stoka Marius I.), Gaz. mat. şi fiz., 1953, 5, № 12, 555—559 (рум.)

Опираясь на теорему Паскаля о шестиугольнике, вписанном в кривую 2-го порядка, автор получает соотношение $S_{136}S_{246}/S_{146}S_{236}=S_{135}S_{245}/S_{145}S_{235}$, где $S_{\alpha\beta\gamma}$ — площадь треугольника с вершинами P_α, P_β, P_γ. Задавая 5 точек, получают $S_{135}S_{245}/S_{145}S_{235}=$ $=$const, следовательно, кривая 2-го порядка есть геометрическое место точек P_6, для которых $S_{136}S_{246}/S_{146}\times$ $\times S_{236}=$const. Для каждого значения const получается определенная кривая, описанная около данного четырехугольника $P_1P_2P_3P_4$. Небольшое преобразование первого соотношения позволяет дать определение кривой 2-го порядка как геометрического места точек P_6, для которых $\delta^6_{13}\delta^6_{24}/\delta^6_{14}\delta^6_{23}=$ const, где $\delta^\gamma_{\alpha\beta}$ есть расстояние точки P_γ от прямой $P_\alpha P_\beta$.

Аналогично, опираясь на теорему Брианшона, автор получает определение кривой 2-го порядка как огибающей семейства прямых, для которых справедливо равенство $S(dd_1d_3)\,S(dd_2d_4)/S(dd_1d_4)\times$ $\times S(dd_2d_3)=$ const, причем $S(d_\alpha d_\beta d_\gamma)$ есть площадь треугольника, образованного прямыми d_α, d_β, d_γ. Для каждого значения const получается определенная кривая, вписанная в данный четырехсторонник $d_1d_2d_3d_4$. *Н. И. Кованцов*

5726. Применения инверсий. Мавродин (Unele aplicaţii ale transformării geometrice prin inversiune. Mavrodin Elena), Rev. mat. şi fiz., 1954, 5, № 1, 3—7 (рум.)

Отмечаются типы задач, в которых оказывается полезным использование метода инверсий: 1) задачи, связанные с коллинеарностью, конкликтностью и пересечением (concurenţă), 2) задачи о геометрических местах, 3) задачи связанные с метрическими соотношениями, и 4) задачи на геометрические построения. Для каждого типа дается пример, иллюстрирующий применение метода инверсий. Дается описание двух видов инверсора (Поселье и Гарта). Отмечаются некоторые свойства инверсии в пространстве, в частности указывается на связь инверсии со стереографической проекцией. Бо́льшая часть содержания статьи (исключая, может быть, примеры) имеется в широко известных учебниках Ж. Адамара (Элементарная геометрия, изд. 3-е, ч. 1. Планиметрия, Учпедгиз, М., 1948) и И. И. Александрова (Сборник геометрических задач на построение, Учпедгиз, М, 1950).

Следует отметить неаккуратное выполнение некоторых чертежей. *Н. И. Кованцов*

5727. Одна теорема о равностороннем треугольнике. Манара (Un teorema sui triangoli equilateri. Manara C. F.), Period. mat., 1953, **31**, сер. 4, № 3, 186—188 (итал.)

Дается еще одно доказательство теоремы:

Для всякого равностороннего треугольника E и точки P в плоскости треугольника существует треугольник, стороны которого равны расстояниям a_i точки P от вершин треугольника E.

Треугольник со сторонами a_i существует, если $S^2>0$, где S — выражение через a_i площади треугольника. Обозначая буквой ρ расстояние точки

P до центра треугольника E и полагая $a_i = 1$, автор получает $16S^2 = 3\rho^4 - 6\rho^2 + 3 \geqslant 0$, что доказывает теорему. *Л. Я. Березина*

5728. Вычисление объема правильного додекаэдра. Ферретти (Calcolo del volume del dodecaedro regolare. Ferretti Paola), Period. mat., 1953, **31**, сер. 4, № 2, 129—130 (итал.)

Объем додекаэдра равен двенадцатикратному объему правильной пятиугольной пирамиды с вершиной в центре додекаэдра. Высота пирамиды — катет прямоугольного треугольника с гипотенузой, равной радиусу круга, описанного около правильного десятиугольника, сторона которого равна половине диагонали пятиугольника грани, а другой катет—апофема этого пятиугольника. *С. И. Зетель*

5729. Неравенства в треугольнике. Герретсен (Ongelijkheden in de driehoek. Gerretsen J. C. H.), Nieuw tijdschr. wiskunde, 1953, **41**, № 1, 1—7 (голл.)

Автор дает геометрическое доказательство следующей теореме Вейтценбёка. В треугольнике со сторонами a, b, c и площадью O

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4O\sqrt{3}.$$

Это доказательство ранее дано референтом (С. И. Зетель «Задачи на максимум и минимум», Гостехиздат, 1948, задачи № 200 и № 201, 128).

Из этого неравенства выводятся различные соотношения (неравенства) в треугольнике. *С. И. Зетель*

5730. Неравенства в треугольнике. Бомстра (Ongelijkheden in de driehoek. Boomstra W.), Nieuw tijdschr. wiskunde, 1953/54, **41**, № 4, 197—202 (голл.)

Биссектрисы внешних углов данного треугольника образуют треугольник, названный автором первым производным. Естественным образом определяется производный треугольник порядка k, элементы которого отмечаются индексом k, а углы просто выражаются через углы данного треугольника. Так как в любом треугольнике угол Брокара $\omega \leqslant 30°$, то $\operatorname{ctg} \omega_k \geqslant \sqrt{3}$, и отсюда, используя соотношение $\operatorname{ctg} \omega = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma$ и выражения углов производных треугольников, автор получает неравенства для элементов данного треугольника, например, при $k = 2$

$$\sec \frac{\alpha}{2} + \sec \frac{\beta}{2} + \sec \frac{\gamma}{2} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} - \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \geqslant \sqrt{3}$$

(раньше другим путем доказывались неравенства, соответствующие случаям $k = 0,1$).

Кроме того, доказывается, что

$$\operatorname{ctg} \omega = \sqrt{3} + \frac{Q}{4O} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_k}{4O_k}$$

(ряд всегда сходится), где O — площадь описанного круга,

$$Q = (b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2.$$

Г. К. Энгелис

5731. Обобщение теоремы Помпейю. Сидлер (Généralisation d'un théorème de M. Pompeïu. Sydler J.-P.), Elem. Math., 1953, **8**, № 6, 136—138 (франц.)

Дается обобщение на пространство любого числа измерений теоремы Помпейю, доказанной для плоскости (см. Павлович, РЖМат, 1953, 395; Сидлер, РЖМат, 1953, 396).

Пусть дано $s \leqslant n+1$ гиперплоскостей $\alpha_1 \ldots \alpha_s$ пространства E^n, пересекающихся попарно под одним и тем же углом. Обозначим символом $[i, j]$ расстояние произвольной точки P пространства от пересечения гиперплоскостей α_i и α_j. Тогда для любой точки P существует симплекс $A_1 \ldots A_s$, стороны которого A_iA_j имеют длины $[i, j]$.

На пространство E^n распространяется и более общая теорема (Павлович, РЖМат, 1953, 395). Специализируя полученный результат для плоскости, автор получает теорему:

Всегда можно построить так называемый ассоциированный треугольник со сторонами, равными расстояниям от произвольной точки, взятой в плоскости данного равностороннего треугольника, до вершин этого треугольника. *Н. М. Несторович*

5732. О некоторых замечательных геометрических задачах на максимум и минимум. Поццоло-Феррарис (Sopra alcuni notevoli problemi geometrici di massimo e minimo. Pozzolo Ferraris Giulia), Archimede, 1953, **5**, № 4—5, 210—212 (итал.)

Приводятся элементарные (без дифференцирования) решения некоторых геометрических задач на максимум и минимум из книги Виейя (Vieille J., Cours complémentaire d'Analyse). Например, для задачи: вписать в шар данного радиуса R цилиндр с наибольшей полной поверхностью, показано, что такой цилиндр существует и имеет полную поверхность, равную $\pi R^2 (1 + \sqrt{5})$. В книге Виейя задача решена ошибочно. *С. И. Зетель*

5733. Золотое сечение, филлотаксис и игра Витгоффа. Коксетер (The golden section, phyllotaxis, and Wythoff's game. Coxeter H. S. M.), Scripta math., 1953, **19**, № 2—3, 135—143 (англ.)

5734 К. Лекции по аналитической геометрии на плоскости. Коммерелль (Vorlesungen über analytische Geometrie der Ebene. Kommerell Karl, 368 S., 3 Aufl., Koehler und Amelang, Leipzig, 1953) (нем.)

Реферируемый учебник по аналитической геометрии отличается обилием фактического материала. Глава I начинается с простейших понятий аналитической геометрии: координаты точек, уравнение эллипса, окружности, графики простейших функций и т. п. Здесь же приведены некоторые исторические сведения. Далее идет нормальная форма уравнения прямой, преобразование кооординат, формула площади треугольника; большое внимание уделено понятиям группы движений, аффинной и проективной групп и началам проективной геометрии на плоскости; дается понятие о гармонической четверке точек, о полном четырехстороннике, несобственных элементах; приводятся теоремы Дезарга и Паскаля и теоремы о проективном отношении двух рядов точек; дается понятие об эллиптической и гиперболической инволюции; приводится теорема о полном четырехстороннике; дается понятие о коор-

динатах прямой, о принципе двойственности, о полюсе и поляре. Глава заканчивается краткими сведениями об инверсии, о семействах кругов; подробно рассматривается мероопределение Кэли—Клейна.

В главе II приводится теория конических сечений. Сначала разбираются отдельно эллипс, гипербола, парабола. Затем идет общая теория кривых второго порядка. Дается понятие об эллиптических координатах и о теории конфокальных кривых.

В главе III вводятся трилинейные координаты с применением к теории кривых. Затем идут теории коллинеации и корреляции, двойных элементов коллинеации, перспективы и т. д. К книге приложена теория определителей. *М. К. Керимов*

5735 к. Лекции по аналитической геометрии в пространстве. Коммерелль (Verlesungen über analytische Geometrie des Raumes. Kommerell Karl), 388 S., 3 Auf., Koehler und Amelang, Lpz., 1953 (нем.)

Книга представляет собой вторую часть университетского учебника аналитической геометрии с традиционным содержанием.

Понятия векторного исчисления вводятся по мере их надобности, даются понятия несобственных элементов, принцип двойственности, вводятся однородные координаты и т. п. Затрагивается теория преобразований шара в себя, вопросы пространственной инверсии. При изложении теории поверхностей второго порядка приведены весьма образные рисунки. Дается теория квадратичных форм n переменных и их инвариантов. Последние главы книги посвящены тетраэдральным координатам, теории коллинеации и корреляции и связкам поверхностей второго порядка. *М. К. Керимов*

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

5736. Геометрия и провешивание клотоиды. Кобольд (Geometrie und Absteckung der Klothoide. Kobold F.), Strasse und Verkehr, 1954, 40, № 2, 36—41 (нем.)

Применение клотоиды, натуральное уравнение которой есть

$$LR = a^2,$$

где L — длина дуги, а R — радиус кривизны, в качестве переходной кривой для соединения дуг двух кривых, в простейшем случае — прямой и круга или двух кругов.

Объяснение устройства таблиц, составленных для клотоиды. *Я. П. Бланк*

5737. Заметка об эквимоментном комплексе твердого тела. Багчи (Note on an equi-momental complex of a rigid body. Bagchi Hari Das), J. Math. and Phys., 1954, 32, № 4, 307—311 (англ.)

Каждой точке A твердого тела соответствует конус равных моментов (Мак-Миллан В. Д., Механика твердого тела, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1951, гл. 2, § 25) Σ_A, совокупность которых образует эквимоментный комплекс прямых. Определяются геометрические места точек A таких, что соответствующие им конусы Σ_A обладают определенными свойствами. Например: если конусы Σ_A имеют по три взаимно перпендикулярных образующих, то точки A принадлежат сфере с центром в центре инерции тела; если конусы Σ_A имеют по три взаимно перпендикулярных касательных плоскости, то точки A принадлежат циклиде, имеющей только две сферы инверсии; если Σ_A — конусы вращения, то точки A принадлежат фокальным эллипсу и гиперболе семейства конфокальных квадрик, порождаемого гирационным эллипсоидом центра инерции. Обозначения, дающие переход от формулы (10) к формуле (11), выписаны неверно; должно быть $D = k^4$, $l'^2 = (l + 2k^2)\,/\,A$ и т. д.

Р. Н. Щербаков

5738. Обобщение кругов Бресса для ускорений высших порядков. Мюллер (Verallgemeinerung der Bresseschen Kreise für höhere Beschleunigungen. Müller Hans Robert), Arch. Math., 1953, 4, № 4, 337—342 (нем.)

Доказываются теоремы:

1. При плоском движении твердого тела точки подвижной плоскости, в которых векторы ускорений $(m-1)$-го и $(n-1)$-го порядков образуют постоянный угол λ, заполняют круг, проходящий через центры этих ускорений P_m и P_n. Два таких круга, проходящих через P_m и P_n и соответствующих углам λ_1 и λ_2, пересекаются под углом $\lambda_1 - \lambda_2$.

2. Точки подвижной плоскости, в которых отношение абсолютных величин ускорений порядков $m-1$ и $n-1$ сохраняет постоянное значение μ, заполняют круг, ортогональный к кругам, рассматриваемым в теореме 1.

Для описания движения твердого тела применяются комплексные числа, с помощью которых автор доказывает эти теоремы. *И. Я. Бакельман*

5739. К вариационным принципам нелинейной теории упругости. Галимов К. З., Уч. зап. Казанского ун-та, 1953, 113, № 10, 155—160

Пользуясь тензорными обозначениями, автор обобщает на случай конечных перемещений начало Кастильяно, применяемое в линейной теории упругости. При произвольных перемещениях имеет место вариационная формула

$$\delta\left[\iiint\limits_V \sqrt{\frac{\overset{*}{g}}{g}}\,\overset{*}{X}{}^{\beta}\tilde{u}_\beta\,dv + \iint\limits_S \tilde{u}_\beta\left(\overset{*}{X}{}^{\beta}_{*\,n}\frac{d\overset{*}{s}}{ds}\right)ds - \right.$$

$$\left. - \iiint\limits_V \left(B_0 - u_{\gamma}\overset{*}{g}{}^{\pi\gamma}P_{\pi,\,\alpha\beta}\sqrt{\frac{\overset{*}{g}}{g}}\,\overset{*}{T}{}^{\alpha\beta}\right)dv\right] = 0,$$

где $\tilde{u}_\beta = u_\beta + \overset{*}{u}_\beta$; u_β, $\overset{*}{u}_\beta$ — компоненты перемещения в системе осей до и после деформации, B_0 — плотность энергии деформации, выраженная в функции компонентов напряжений, $\overset{*}{T}{}^{\alpha\beta}$, $\overset{*}{X}{}^{\alpha}$, $\overset{*}{X}{}^{\alpha}_{*\,n}$, — контравариантные компоненты в системе осей после деформации тензора напряжения, вектора объемной силы и вектора поверхностных сил. В этой формуле перемещения и деформации не варьируются. Автор замечает, что вариационная формула, данная в работе А. Филлипса (Phillips

A., Variational principles in the theory of finite plastic deformations, Quart. Appl. Math., 1949, 7, № 1, 110—114), обобщающая начало Кастильяно на случай конечных перемещений, ошибочна.

В работе строится также функционал для решения проблемы устойчивости упругого равновесия при конечных деформациях. *В. С. Жгенти*

5740 К. Элементы тензорного исчисления и его приложения к механике. Кильчевский Н. А., 167 стр., Гостехиздат, М., 1954, 5 р. 15 к.

В книге излагаются основы тензорной алгебры и тензорного анализа с их приложениями к механике. В главе I автор, опираясь на наглядно-геометрические и физические представления, вводит понятие вектора и основные векторные операции. Глава II посвящена построению аппарата тензорной алгебры и сжатому изложению элементов тензорного анализа в евклидовом, а затем и в римановом пространствах.

Значительное место в книге занимают приложения тензорной алгебры и тензорного исчисления к механике дискретных систем материальных точек и сплошной среды.

В главе III излагается метод, с помощью которого исследование системы материальных точек с голономными связями сводится к рассмотрению движения точки на m-мерной поверхности n-мерного евклидова пространства. Одновременно находятся реакции связей. Получаемые таким образом формулы обобщают соотношения, имеющие место при движении материальной точки по поверхности. В той же главе даются приложения к динамике систем с неголономными связями.

В главе IV основные уравнения механики сплошной среды, с помощью понятия ковариантной производной тензора, выводятся в инвариантной форме.

Там же дается метод конструирования симметрических тензоров $Q_{ik}\,(i,\ k=1,\ldots,n)$, зависящих от произвольных функций $\Phi_{ik}\,(\Phi_{ik}=\Phi_{ki})$ декартовых координат $x^l\,(l=1,\ldots,n)$ и удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial Q_{ik}}{\partial x^k}=0.$$

Метод основан на рассмотрении тензора

$$T_{ik}=\varepsilon^{-1}\left(R_{ik}-\frac{1}{2}\,g_{ik}R\right),$$

где

$$g_{ik}=\delta_{ik}+\varepsilon\Phi_{ik}\quad(\delta_{ik}=0\text{ при }i\neq k,\ \delta_{ii}=1),$$

R_{ik} — сокращенный тензор кривизны, построенный на базе g_{ij}, а ε — произвольное постоянное число. Как известно, для ковариантной производной $T_{ij,k}$ этого тензора имеют место тождества

$$g^{jk}T_{ij,k}=0$$

(g^{jk} обозначает матрицу, обратную g_{ik}).

Отсюда при разложении левой части по степеням ε получается тензор Q_{ik}, удовлетворяющий упомянутой системе дифференциальных уравнений. В книге приведены примеры использования этого метода для получения различных формул механики сплошной среды. *Я. Л. Шапиро*

ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

5741. Перспективные тройки. Андрессс, Саддлер с примечанием Сойера (Perspective triads. Andress W. R., Saddler W., with a note by Sawyer W. W.), Math. Gaz., 1953, **37**, № 322, 247—255 (англ.)

Выводятся аналитические условия того, что две тройки точек на проективной плоскости находятся в тройной и шестерной перспективах, т. е. перспективны относительно трех или шести центров. Если две тройки точек находятся в тройной перспективе, то существует такая тройка точек, которая с каждой из них находится в шестерной перспективе и обратно. Две тройки точек, являющихся центрами перспектив двух троек точек, находящихся в шестерной перспективе, сами находятся в шестерной перспективе.

В примечании Сойера последняя теорема доказывается с помощью свойств плоских кривых третьего порядка. *М. А. Джавадов*

5742. Порядок в проективной и в дескриптивной геометрии. Уайлер (Order in projective and in descriptive geometry. Wyler Oswald), Compositio math., 1953, **11**, № 1, 60—70 (англ.)

В работе строятся аксиомы порядка, сохраняющие силу как для евклидовой и гиперболической, так и для эллиптической геометрии, или, другими словами, как для дескриптивной (в смысле Веселла — Уайтхеда и Веблена), так и для проективной геометрии. Построенная аксиоматика близка к аксиоматике проективной геометрии, изложенной в курсе Коксетера (Coxeter H. S. M., The real projective plane, N. Y., 1949). Число измерений пространства считается произвольным. Автор начинает с аксиом соединения, затем перечисляет основные аксиомы разделения (основное понятие: пара прямых a, b разделяет пару c, d или $ab\,||\,cd$, a, b, c, d — прямые одного пучка; производное понятие: пара α, β разделяет пару γ, δ или $\alpha\beta\,||\,\gamma\delta$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — прямые одного пучка или точки пересечения этих прямых с одной прямой). Далее определяется сектор со сторонами a, b (совокупность таких точек P, что $ab\,||\,cP$, a, b, c принадлежат к одному пучку), отрезок с концами A, B (совокупность таких точек P, что $AB\,||\,CP$ и каждая прямая d, такая что $AB\,||\,Cd$ пересекает прямую AB; A, B, C — точки одной прямой) и треугольник (определяется аксиомой Паша); смысл последней аксиомы порядка заключается в утверждении существования треугольника с тремя данными вершинами. В конце работы рассматриваются понятия полупрямой и полуплоскости и указывается, как в случае дескриптивной геометрии (т. е. при наличии непересекающихся прямых) перейти от построенных аксиом к гильбертовским аксиомам порядка. *И. М. Яглом*

5743. О проективных образах правильных сеток. Норкин С., Уч. зап. Вологод. пед. ин-та, 1953, **13**, 147—151

Рассматривается построение проективных образов правильных сеток на плоскости по заданному проективному образу одного элемента. Доказательства теорем основаны на элементарных построениях в проективной плоскости. Принципиально новых результатов в работе не содержится. *Е. А. Морозова*

5744. О возможности решения задач на построение 2-й степени в плоскости Лобачевского при помощи циркуля и гиперциркуля. Рогаченко В. Ф., Уч. зап. Львовск. ун-та, сер. физ.-матем., 1953, 22, № 5, 72—83

Дается развернутое изложение результатов, опубликованных автором в Докл. АН СССР (РЖМат, 1953, 406). В реферируемой статье используется, в отличие от предыдущей,— преобразование инверсии. Приводится, кроме того, нахождение точек пересечения: 1) прямой и эквидистанты, 2) прямой и орицикла, 3) окружности и орицикла, 4) эквидистанты и орицикла, 5) двух орициклов.

Для обозначения непересекающихся и непараллельных прямых, лежащих в одной плоскости, предпочтительнее термин самого Лобачевского — «расходящиеся» — вместо употребляемого иностранными авторами — «сверхпараллельные».

Н. М. Нестерович

5745. Вывод гиперболической тригонометрии на полуплоскости Пуанкаре. Сас (Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie in der Poincaréschen Halbebene. Szász Paul), Acta scient. math., 1954, 15, № 2, 126—129 (нем.)

При помощи известной интерпретации Пуанкаре плоскости Лобачевского в евклидовой полуплоскости дается вывод двух формул гиперболической тригонометрии прямоугольного треугольника: $\operatorname{ctg}\lambda\cdot\operatorname{ctg}\mu = \operatorname{ch} c$, $\cos\lambda = \operatorname{ch} a\cdot\sin\mu$, где λ и μ — острые углы треугольника, прилегающие к стороне c, a — сторона, лежащая против угла λ.

При этом используется проективно метрическое определение расстояний.

Аналогичный, но более подробный вывод всех формул тригонометрии прямоугольного треугольника при помощи полуплоскости Пуанкаре был дан ранее Смогоржевским (О. С. Смогоржевський. Основи геометрії, Київ, 1947, 177—180). *В. Ф. Рогаченко*

5746. Об одной из теорем прямоугольной аксонометрии. Дешевой Г. М., Тр. Ленингр. технол. ин-та, 1953, № 25, 115—124

В работе рассматриваются примеры решения некоторых метрических задач в прямоугольных аксонометрических проекциях. При этом используется метод совмещения плоскости с плоскостью картины и применяется известная теорема о том, что ортогональная проекция перпендикуляра к данной плоскости, перпендикулярна к следу этой плоскости на картинной плоскости.

Н. Ф. Четверухин

5747. О проведении перпендикуляра к плоскости в аксонометрии. Житников К. А., Науч. тр. Ленингр. инж.-строит. ин-та, 1953, № 14, 117—120

Разбирается вопрос о способах построения перпендикуляра к данной плоскости в аксонометрических проекциях. В частности, излагается способ А. И. Викселя, в котором применяется вращение прямоугольного треугольника на прямой угол.

Н. Ф. Четверухин

5748. Бесфокусный метод построения перспектив. Куликов К. И., Тр. Новочеркасского политехн. ин-та, 1953, 23, 125—128

Применение точек схода устраняется тем, что вертикальные отрезки изображаемой фигуры вращаются около лучей, лежащих в плоскости горизонта и перпендикулярных к этим отрезкам, до совмещения последних с плоскостью горизонта. Построение перспективных величин вертикальных отрезков сводится к построению перспектив отрезков, лежащих в плоскости плана.

Предлагаемый метод представляет разновидность координатного метода (Пальшау А. Н., Начала начертательной геометрии. ГИЗ, М.—Л., 1931, § 400). *Н. М. Нестерович*

5749 К. Элементарное введение в геометрию Лобачевского. Норден А. П., 248 стр., Гостехиздат, М., 1953, 5 р. 05 к.

Книга предназначена для преподавателей математики, студентов близких к математике специальностей, учащихся старших классов средней школы. Она будет полезна и для читателя, знакомого с геометрией Лобачевского.

Введение содержит краткий исторический обзор фактов, связанных с открытием неевклидовой геометрии; в нем выясняется также смысл основных понятий геометрии и вопрос об истинности ее аксиом. В главах I, II, VI рассмотрены аксиомы абсолютной геометрии и некоторые их следствия, приводимые в большинстве без доказательств. Аксиомы порядка даны в той же редакции, что и в книге Д. И. Перепелкина «Курс элементарной геометрии», т. I, Гостехиздат, М. — Л., 1948. В главах III — V, VII, VIII, X излагаются начала геометрии Лобачевского. В главе IX изложена элементарная теория показательной и гиперболических функций. Важная в принципиальном отношении глава XI содержит доказательство непротиворечивости геометрии Лобачевского, основанное на построении ее проективной интерпретации. Наконец, в главе XII бегло очерчены новые направления в математике и физике, развившиеся под влиянием идей Лобачевского.

Изложение ряда вопросов (свойства параллельных прямых и плоских линий постоянной кривизны в геометрии Лобачевского, вывод формул гиперболической тригонометрии, построение проективной интерпретации геометрии Лобачевского, способ построения функции e^x) отличается оригинальностью и простотой.

В книге встречаются невнимательно отредактированные формулировки, например: 1) «... если многоугольник разбит на части, то его площадь равна сумме площадей его частей» (стр. 49); многоугольник определяется как замкнутая ломаная; ее частью будет незамкнутая ломаная; 2) «V постулат Евклида может быть сформулирован в следующей форме: через точку вне данной прямой можно провести в ее плоскости одну и только одну, не пересекающую ее прямую» (стр. 51); 3) на стр. 101 (теорема 2) автор утверждает, что все точки эквидистанты равноудалены от точек ее базы. В нумерации аксиом соединения допущена ошибка (см. стр. 27 и 104).

А. С. Смогоржевский

5750 К. Интерпретация проективной геометрии с помощью окружностей. Гордевский Д. З., 36 стр., Изд. Харьковского ун-та, Харьков, 1953, 60 коп.

Геометрия трехмерного проективного пространства интерпретируется с помощью окружностей в конформной плоскости следующим образом. Точке ставится в соответствие окружность действительного,

мнимого, нулевого или бесконечного радиуса; прямой — пара точек, различных или совпадающих; плоскости — окружность любого из четырех типов. Точке A, лежащей в плоскости α, соответствует окружность A, ортогональная окружности α. Прямой a, лежащей в плоскости α, соответствует пара точек a, инверсных относительно окружности α. Прямой a, проходящей через точку A, соответствует пара точек a, инверсных относительно окружности A.

Проективные аксиомы связи, порядка и непрерывности выполняются в предложенной интерпретации.

Введение абсолюта позволяет также интерпретировать геометрию Лобачевского и Римана.

Аналогично строится интерпретация четырехмерного проективного пространства с помощью шаров в трехмерном конформном пространстве. *Я. П. Бланк*

5751 Д. Применение гипербол к построению перспективных изображений и некоторые другие способы построения перспектив. М е т е л и ц М. З., Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. инж.-строит. ин-т, Москва, 1954

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

5752. О совокупности алгебраических рациональных многообразий комплексного пространства. С е г р е (Sulla totalità delle varietà algebriche razionali di uno spazio complesso. S e g r e B e n i a m i n o), Boll. Unione mat. ital., 1953, 8, сер. 3, № 4, 374—377 (итал.)

Многообразие П в комплексном проективном пространстве S_n называется вещественным (рациональным), если его можно задать системой алгебраических уравнений с вещественными (рациональными) коэффициентами. Доказывается следующая теорема, характеризующая плотность множества рациональных многообразий в S_n. Для всякого рационального Π_p в S_n можно найти сколь угодно близкое к нему (т. е. получающееся из П гомографическим преобразованием, сколь угодно близким к тождественному) вещественное многообразие Ω, не имеющее общих точек ни с каким рациональным многообразием размерности $< n-p$.

Доказательство основано на лемме: если V_r $(1 \leqslant r \leqslant n-1)$ рациональное неприводимое многообразие в S_n и P — его вещественная простая точка, то в любой окрестности P на V_r найдется такая вещественная точка O, что любое рациональное многообразие, проходящее через O, содержит все V_r.

В. В. Морозов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

5753. Простые задачи на вычисление длин дуг. Т е р с т о н (Simple problems on arc length. T h u r s t o n H. S.), Amer. Math. Monthly, 1953, 60, № 10, 705—706 (англ.)

Автор показывает, вопреки сложившемуся мнению о трудности задач на вычисление длин дуг плоских кривых, что можно подобрать большое количество задач, решение которых приводится к вычислению простых интегралов. С этой целью он предлагает задавать исходную кривую в виде $y = F(x) + G(x)$, где $4F'G' + 1 = 0$; тогда $1 + y'^2 = (F' - G')^2$ и вычисление длины дуги приведется к равенству

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_a^b |F'(x) - G'(x)|\, dx.$$

В. А. Яблоков

5754. Эпициклоиды или гипоциклоиды, касательные к трем прямым. Г а м б ь е (Épi- ou hypocycloïdes tangentes à 3 droites. G a m b i e r B.), J. math. pures et appl., 1954, 33, № 1, 1—28 (франц).

Теорема Морли (Morley): геометрическое место фокусов кардиоид, касательных к трем данным прямым плоскости, представляет собою совокупность 9 прямых, которые по три параллельны сторонам некоторого равностороннего треугольника, — обобщается на случай, когда кардиоиды заменены подобными эпициклоидами или гипоциклоидами. Рассматривая эпициклоиды и гипоциклоиды (Г), как огибающие хорд круга, угловые координаты φ и φ' начала и конца которых связаны соотношением $\lambda\varphi = \mu\varphi'$ (λ/μ — рациональная несократимая дробь), автор определяет класс, порядок, кратные касательные и устанавливает некоторые свойства касательных этих кривых.

Изучаются общие касательные к двум кривым типа (Г); они допускают распределение на группы по n касательных в каждой, где n — класс этих кривых; касательные, принадлежащие к одной группе, касаются некоторого конического сечения, вырождающегося в окружность, когда рассматриваемые кривые имеют общий центр.

Кривые (Г), касательные к трем данным прямым, распределяются в n^2 однопараметрических семейств; при этом кривые, принадлежащие к одному семейству, имеют центры, лежащие на прямой линии; они имеют, кроме того, $n-3$ общих касательных, и все n общих касательных касаются упомянутого конического сечения; точки пересечения каждых двух прямых, соединяющих центры рассматриваемых кривых, или служат центром той кривой (Г), двойная касательная которой совпадает с одной из n указанных касательных, или являются общим центром двух кривых (Г), принадлежащих двум различным семействам.

Рассматриваются некоторые частные случаи, соответствующие различным значениям λ и μ; один из них (при $\lambda = 2$, $\mu = 1$) приводит к теореме Морли. *К. К. Мокрищев*

5755. Признак кривых Кнезера — Жюеля. У н г е р (Ein Kriterium für die Kneser — Juelschen Kurven. U n g e r G e o r g), Arch. Math., 1953, 4, № 2, 143—153 (нем.)

В работе изучаются особенности действительных кривых в проективной плоскости без аналитических ограничений.

Двойственно-непрерывной кривой называется множество K элементов Pp (точка P и проходящая через нее прямая p), удовлетворяющее следующим условиям: a) множество K упорядочено и в нем соблюдается аксиома непрерывности (внутренняя непрерывность), b) элементы K из каждой внешней точки непрерывно проектируются и каждой внешней прямой непрерывно пересекаются (внешняя непре-

рывность), c) из $Q_i \to P$ следует $PQ_i \to p$ и из $q_i \to p$ следует $pq_i \to P$.

Если Pp — элемент кривой, а A — внешняя точка ($A \neq P$, $A \varnothing p$; $\circ$ — знак инцидентности, $\varnothing$ — отрицание инцидентности), то возможны два случая: A) в малой двусторонней окрестности элемента Pp точки, предшествующие P и следующие за P, попадают по разные стороны луча AP, B) они попадают по одну сторону луча AP. Если a — внешняя прямая ($a \neq p$, $a \varnothing P$), то возможны два случая: a) в малой двусторонней окрестности элемента Pp прямые, предшествующие p и следующие за p, пересекают прямую a по разные стороны точки ap, b) они пересекают ее по одну сторону от точки (ap). Эти две дизъюнкции независимы, т. е. возможны четыре комбинации: Aa) обыкновенный элемент (α-элемент), Ba) «точка заострения» (β-элемент), Ab) «точка перегиба» (γ-элемент), Bb) «клюв» (δ-элемент). Кавычки указывают на различие с элементарными особенностями, которые на регулярной дуге располагаются изолированно. Последнее обстоятельство для двойственно непрерывных кривых, вообще говоря, не обязательно, как видно из примера $y = x^2(a + b \sin \ln |x|)$, $a > 0$, $b > 0$, $a/b > \sqrt{5}/2$. Точка $O(0, 0)$ и касательная в ней $y = 0$ образуют α-элемент. Если $a/b > \sqrt{10}/2$, то в любой окрестности точки O имеются точки перегиба. Если $a/b > \sqrt{2}$, то при $P_i \to 0$ точка O бесконечно много раз оказывается по разные стороны касательной p_i.

Вводятся понятия регулярной дуги, дуги простой в малом и максимально непрерывной кривой. Кривая называется максимально непрерывной, если из $Q_i \to P$, $R_i \to P$ следует $Q_iR_i \to p$ и из $q_i \to p$, $r_i \to p$ следует $q_ir_i \to P$. Устанавливается связь понятия максимально непрерывной кривой с кривыми, изучавшимися А. Кнезером (1889) и Х. Жюелем (1913—1915). *Н. М. Бескин*

5756. Геодезические линии эллипсоида в неевклидовом пространстве. Мордухай-Болтовской Д., Докл. АН СССР, 1954, 94, № 6, 991—993

В основу вывода уравнения геодезических линий на эллипсоиде кладется принцип Герца: материальная точка при отсутствии внешних сил должна двигаться на поверхности по геодезической линии. Исследование ведется в вейерштрассовских координатах. Бóльшая часть статьи посвящена обобщению теоремы Иоахимсталя.

Через какую-нибудь точку M на геодезической эллипсоида проведем касательную MT к последней, а также плоскость P, касательную к эллипсоиду. Пусть расстояние центра O эллипсоида от касательной плоскости P будет δ. Проведем еще через центр O эллипсоида плоскость Q, перпендикулярную к касательной MT, а также прямую OA, перпендикулярную к плоскости Q. Обозначим буквой r отрезок прямой OA от центра эллипсоида до пересечения с поверхностью его. Тогда величины r и δ для всех точек геодезической связаны соотношением

$$\operatorname{sh}\delta \operatorname{th} r = \text{const}.$$

В вопросе о выводе уравнения геодезических линий на эллипсоиде автор ограничивается указанием хода вывода, указанием на сохранение в силе всего хода вычислений в якобиевском методе определения геодезических кривых поверхностей второго порядка и приводит окончательные уравнения геодезических линий, зависящие, как и в пространстве Евклида, от ультраэллиптических интегралов 1-го класса.

Н. М. Несторович

5757. Условия неразрывности деформации поверхности при произвольных изгибах и деформациях. Галимов К. З., Уч. зап. Казанского ун-та, 1953, 113, № 10, 161—164

Пусть a_{ij}, b_{ij} и $a^*_{ij} = a_{ij} + 2p_{ij}$, $b^*_{ij} = b_{ij} + q_{ij}$ будут ковариантные составляющие первой и второй квадратичных форм поверхности до и после деформации соответственно. Тензоры a_{ij}, b_{ij}, а также a^*_{ij}, b^*_{ij} удовлетворяют соотношениям Гаусса—Кодацци, следовательно, существует три соотношения между p_{ij}, q_{ij}. Эти соотношения, так называемые условия неразрывности деформации, выражаются так

$$c^{\beta\gamma}c^{\sigma\alpha}\Big(\nabla_\gamma\nabla_\alpha p_{\sigma\beta} - \frac{1}{2}q_{\alpha\beta}q_{\gamma\sigma} + \frac{1}{2}a^{\pi\lambda}_* P_{\pi,\alpha\beta}P_{\lambda,\sigma\gamma}\Big) + (2Ha^{\alpha\beta} - b^{\alpha\beta})q_{\alpha\beta} - Ka^{\alpha\beta}p_{\alpha\beta} = 0, \qquad (*)$$

$$c^{\beta\gamma}[\nabla_\gamma q_{i\beta} + a^{\sigma\lambda}_*(b_{\lambda\gamma} + q_{\lambda\gamma})P_{\sigma,i\beta}] = 0,$$

где c^{ij} — дискриминантный тензор метрического тензора a_{ij}, ∇_j — символ ковариантного дифференцирования в метрике a_{ij},

$$P_{i,jk} = \nabla_j p_{ki} + \nabla_k p_{ji} - \nabla_i p_{jk},$$

$$2H = a^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta}, 2K = c^{\alpha\beta}c^{\gamma\rho}b_{\alpha\gamma}b_{\beta\rho}.$$

Они получены автором (Изв. Казанского фил. АН СССР, сер. физ.-матем. и техн. н., 1950, № 2,3—38) путем вычитания из соотношений Гаусса—Кодацци для деформированной поверхности соответствующих соотношений для недеформированной поверхности. Здесь дан более простой и непосредственный вывод: пара координатных векторов поверхности рассматривается как ковариантный тензор первой валентности с векторными компонентами.

Даются упрощенные варианты условий (*) для малых деформаций и произвольных изгибов.

Н. А. Алумяэ

5758. Некоторые двусторонне расслояемые пары конгруенций. Березина Л. Я., Изв. АН ЛатвССР, 1953, № 3, 132—134 (русск.; резюме лат.)

Устанавливается существование следующих видов расслояемых пар конгруенций: a) пары, для которой общие перпендикуляры соответствующих лучей проходят через середину лучей одной из конгруенций; b) пары, для которой биссектриса фокальных плоскостей одной из конгруенций пары проходит через общий перпендикуляр соответствующих лучей; c) пары, для которой главная плоскость одной из конгруенций пары проходит через общий перпендикуляр соответствующих лучей; d) пары, у которой общие перпендикуляры соответствующих лучей проходят через фокусы лучей одной из конгруенций,

образующих пару; е) пары, у которой одна из конгруенций пары есть нормальная конгруенция.

Произвол существования каждой из этих пар — шесть функций одного аргумента. *О. С. Редозубова*

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

5759. Жесткость V_{n-1} в римановом пространстве S_n постоянной кривизны. Лемуан (Rigidité des V_{n-1} d'un espace riemannien S_n, à courbure constante. Lemoine Simone) C. r. Acad. sci., 1954, **238**, № 5, 559—561 (франц.)

Анализируя условия Гаусса и Петерсона—Кодацци гиперповерхности V_{n-1} пространства S_n постоянной ненулевой кривизны (произвольной сигнатуры), автор приходит к теореме:

Произвольная гиперповерхность V_{n-1} пространства S_n постоянной ненулевой кривизны $K \neq 0$ неизгибаема при $n > 4$. В S_4 не существует развертывающейся гиперповерхности V_3, а также гиперповерхности, изгибающейся с сохранением асимптотического направления.

Для случая $n = 4$, $K = -\rho^2$ вводится понятие регулярного изгибания, при котором не выделяется никакого привилегированного направления, и сингулярного изгибания, когда имеет место противное.

В любом S_4 существуют гиперповерхности V_3, регулярно изгибаемые, и гиперповерхности V_3, сингулярно изгибаемые.

1. Метрика гиперповерхности V_3, регулярно изгибаемой, может быть записана в виде

$$ds^2 = [(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (dx^3)^2] / [\varphi(x^3)]^2,$$

где ω^i — произвольные формы Пфаффа от двух переменных и $\varphi(x^3)$ есть одна из трех функций ρx^3, $\operatorname{sh} \rho x^3$, $\sin \rho x^3$.

2. Любая V_3, сингулярно изгибаемая, всегда изгибается с сохранением сопряженных линий. *Н. Н. Яненко*

5760. О задаче погружения пространств постоянной кривизны друг в друга. Татибана (On the embedding problem of spaces of constant curvature in one another. Tachibana Syun-ichi), Natural Sci. Rept. Ochan. Univ., 1953, **4**, № 1, 44—50 (англ.)

Пользуясь методом подвижного репера и внешних форм Картана, автор проводит выкладки, направленные на доказательство следующих утверждений: если S_n и $\widetilde{S}_N$ — пространства с постоянными кривизнами, равными K и $\widetilde{K}$ соответственно, то в случаях (A) $\widetilde{K} > K$, $N = n + 1$; (B) $\widetilde{K} < K = 0$, $N = 2n - 1$, S_n может быть изометрически погружено в $\widetilde{S}_N$.

Вследствие ошибки в знаке перепутаны кривизны вмещающего $\widetilde{K}$ и погруженного K пространств. *В. В. Рыжков*

5761. Поверхности транзитивности полупростой подгруппы группы движений симметрического пространства. Карпелевич Ф. И., Докл. АН СССР, 1953, **93**, № 3, 401—404

Известно, что в вещественной полупростой алгебре Ли G всегда можно выделить максимальную «компактную» (т. е. отвечающую максимальной компактной подгруппе) подалгебру H, а также построить ортогональное к ней дополнение X. Ортогональность понимается в смысле картановой метрики в G, которая при этом будет отрицательно определенной на H и положительно определенной на X.

Пусть теперь в G вложена подалгебра $\widetilde{G}$, также полупростая, в которой выделены $\widetilde{H}$ и $\widetilde{X}$ аналогично H и X в G.

Автор называет вложение $\widetilde{G}$ в G каноническим, если при подходящем выборе H в G (H строится с точностью до преобразований присоединенной группы) имеет место $\widetilde{H} \subset H$, $\widetilde{X} \subset X$.

Теорема 1. Вложение полупростой алгебры $\widetilde{G}$ в полупростую алгебру G всегда каноническое.

Доказательство существенно использует однородное пространство G/H (с группой G и стационарной подгруппой H). Такое однородное пространство, как показано Картаном, всегда будет симметрическим римановым пространством отрицательной кривизны (верно и обратное). При помощи геометрических конструкций в этом пространстве доказывается лемма 2: если $G \supset G_1 \supset G_2$ (алгебры G, G_1, G_2 — полупростые), причем G_1 и G_2 вложены в G канонически, то G_2 вложена в G_1 тоже канонически.

Кроме того, пространство G/H позволяет формулировать геометрический эквивалент теоремы 1.

Теорема 2. Пусть $\widetilde{G}$ — полупростая подгруппа полупростой группы движений G симметрического риманова пространства отрицательной кривизны. Тогда среди поверхностей транзитивности группы $\widetilde{G}$ существует хотя бы одна вполне геодезическая поверхность. *П. К. Рашевский*

5762. О структуре изотропных тензоров и тензоров вращения. Моро (Sur la structure des tenseurs isotropes et des tenseurs de révolution. Moreau Jean-Jacques), C. r. Acad. sci., 1954, **238**, № 4, 441—443 (франц.)

Изотропными тензорами называются тензоры, компоненты которых не изменяются при любом преобразовании прямоугольной системы координат; тензорами вращения — тензоры, компоненты которых не изменяются при вращении системы координат вокруг заданной прямой (Moreau J.-J., C. r. Acad. sci., 1950, **230**, № 20, 1734; 1950, **231**, № 20, 1028).

Приводится элементарное доказательство для трехмерных тензоров известной теоремы: любой изотропный тензор является линейной комбинацией элементарных тензоров, получаемых тензорным умножением символов ε и δ (Гуревич Г. Б., Основы теории алгебраических инвариантов, ОГИЗ, М.—Л., 1948, 164—176). Доказательство основано на рассмотрении инфинитезимальных преобразований.

Указано, что аналогично можно доказать теорему: все тензоры вращения являются линейными комбинациями тензорных выражений, построенных с помощью символов ε и δ и направляющего вектора оси вращения. *Ю. Е. Пензов*

5763. Несуществование особых точек конформного отображения пространства. Гастин (Non-existence of conformal singularities in solid spaces. Gustin Wm.), J. Rational Mech. and Analysis, 1954, 3, № 1, 73—76 (англ.)

Рассматривается конформное аналитическое отображение $y = y(x)$ области X классического n-мерного риманова пространства в область Y такого же пространства. При таком отображении $y_\alpha y_\beta = p(x) g_{\alpha\beta}$, где слева стоит скалярное произведение векторов y_α—производных функций y относительно координат x, а $g_{\alpha\beta}$—метрический тензор пространства X. Особыми точками такого отображения автор называет точки, в которых функция $p(x)$ обращается в 0.

Доказывается, что если при $n > 2$ отображение $y = y(x)$ имеет хоть одну особую точку, то y является постоянным на области X и эта область отображается просто в точку области Y. Следовательно, невырожденное отображение при $n > 2$ особых точек не имеет. При $n = 2$ отображение $y = y(x)$ в окрестности рассматриваемой особой точки ведет себя так же, как функция $w = z^m$ комплексного переменного z в окрестности нуля.

Подчеркивается, что положительная определенность метрических тензоров обоих рассматриваемых римановых пространств является существенным условием доказанного предложения. *М. А. Акивис*

5764. Связность в косых произведениях. Кобаяси (La connexion des variétés fibrées. Kobayashi Shôshichi), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 3, 318—319 (франц.)

Дается определение и доказывается существование инфинитезимальной связности в дифференцируемых косых произведениях со структурной группой, являющейся группой Ли. Изучается связь между группой голономии, построенной по этой связности, и структурой косого произведения.

Посредством введения присоединенного главного произведения общий случай можно свести к случаю главного произведения. Главному косому произведению (E, B, F, π) (B—база, F—слой, совпадающий со структурной группой G, π—проекция) сопоставляется косое произведение $(T(E), T(B), T(F), d\pi)$, где $T(E)$, $T(B)$, $T(F)$ суть совокупности всех касательных векторов соответственно к E, B, F. Группа G естественным образом действует в $T(E)$ и $T(F)$. Идентифицируя элементы, которые получаются друг из друга посредством G, получим новое косое произведение $(T(E)/G, T(B), T(F)/G, \tilde{d\pi})$, у которого слой естественно отождествляется с алгеброй Ли группы G. Это косое произведение имеет дифференцируемую секущую поверхность. Отображение $\varphi : T(B) \to T(E)/G$, задающее секущую поверхность, можно выбрать так, чтобы для любых двух векторов u, v, касающихся B в одной и той же точке, и любых чисел λ и μ $\varphi(\lambda u + \mu v) = \lambda\varphi(u) + \mu\varphi(v)$. Такая функция φ называется инфинитезимальной связностью в E.

Пусть $\mu(t)$, $\nu(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$—кусочно-гладкие пути соответственно в B и E и пусть $\pi\nu(t) = \mu(t)$. Если для любого t $\varphi(\dot{\mu}(t)) = \dot{\nu}(t)$ ($\dot{\mu}(t)$ и $\dot{\nu}(t)$ суть касательные векторы к $\mu(t)$ и $\nu(t)$), то пути $\mu(t)$ и $\nu(t)$ называются параллельными. Из каждой точки E, лежащей над началом пути $\mu(t)$, начинается ровно один путь, параллельный пути $\mu(t)$. Каждому замкнутому пути в B, начинающемуся и кончающемуся в точке b, соответствует взаимно однозначное преобразование слоя F, лежащего над b. Эти преобразования образуют группу голономии косого произведения E. Утверждается, что эта группа всегда является подгруппой группы G (необязательно замкнутой). Далее утверждается, что условием, необходимым и достаточным для того, чтобы структурная группа G могла быть редуцирована к своей подгруппе H (т. е. существовало эквивалентное косое произведение со структурной группой H), является условие, чтобы группа голономии (относительно некоторой инфинитезимальной связности) содержалась в H. Указывается приложение к вопросу о существовании квазикомплексной и квазикватернионной структур на вещественных многообразиях. Доказательства отсутствуют.

Е. Б. Дынкин

5765. О деформациях пространства, основанных на группе $\bar{x} = hx + a$, $\bar{y} = kx + h^m y + b$. Слободзинский (Sur les déformations de l'espace basé sur le groupe $\bar{x} = hx + a$, $\bar{y} = kx + h^m y + b$. Slebodziński W.), Roczn. Polskiego towarz. mat. (Ann. Soc. polon. math.), 1952, 25, 231—237 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (франц.)

Изучаются инварианты семейства интегральных кривых уравнения $dy/dx = f(x,y)$ относительно бесконечной группы преобразований $\bar{x} = \varphi(x)$, $\bar{y} = \Phi(x) + \varphi'^m(x)y$. Если $d\bar{y}/d\bar{x} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{y})$— преобразованное уравнение, то имеют место соотношения

$$\bar{f}''_{\bar{y}^2} = \sigma^{m+1} f''_{y^2},\ \bar{f}'''_{\bar{y}^3} = \sigma^{2m+1} f'''_{y^3},\ \text{и т. д.},$$

где $\sigma = (\varphi')^{-1}$. Всякое линейное уравнение оказывается эквивалентным уравнению $dy/dx = 0$. У нелинейных уравнений имеются абсолютные инварианты

$$I_1 = (f'''_{y^3})^{1/(2m+1)}/(f''_{y^2})^{1/(m+1)}$$

и

$$I_2 = (M''_{y^2} - f'_y f''_{y^2})/(f''_{y^2})^{(m+2)/(m+1)},$$

где $M = f'_x + ff'_y$, а также инвариантные дифференциальные формы

$$\tau_1 = (f''_{y^2})^{1/(m+1)} dx \text{ и } \tau_2 = (f''_{y^2})^{m/(m+1)}(dy - f dx).$$

Коэффициенты разложения дифференциала любого инварианта по формам τ_1 и τ_2 сами являются инвариантами. Если у двух семейств кривых, у которых I_1 и I_2—независимые между собой функции, коэффициенты разложения dI_1 и dI_2 по τ_1 и τ_2— одинаковые функции от I_1, I_2, то эти семейства эквивалентны относительно группы. *А. М. Васильев*

5766. Обобщение сопряженных аффинных связностей. Ху Хэ-Шен (胡和生) // 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1953, 3, № 4, 343—357 (кит.; резюме англ.)

В работе дается обобщение понятия пары сопряженных аффинных связностей, установленного Норденом (Норден А. П., Пространства аффинной связности, Гостехиздат, 1950)

В многообразии X_n заданы m аффинных связностей $\Gamma, \Gamma, \ldots, \Gamma$ с коэффициентами
$\quad 1 \quad 2 \qquad m$

$$\Gamma^k_{ij}, \ \Gamma^k_{ij}, \ \ldots, \ \Gamma^k_{ij}$$
$\quad 1 \qquad 2 \qquad\quad m$

соответственно. Эти связности называются сопряженными относительно симметричного псевдотензора

$$b_{i_1 i_2 \ldots i_m},$$

если всякий псевдовектор $v^{i_k}_{k}$, удовлетворяющий уравнению

$$b_{i_1 i_2 \ldots i_k \ldots i_m} v^{i_1}_{1} v^{i_2}_{2} \ldots v^{i_n}_{k} \ldots v^{i_m}_{m} = 0,$$

переносится параллельно в связности Γ_k, когда псевдовекторы $v^i_l (l \neq k)$ переносятся параллельно в соответствующих связностях Γ_l.

Условие сопряженности имеет вид уравнения

$$\partial_k b_{i_1 i_2 \ldots i_m} - \Gamma^p_{1 k i_1} b_{p i_2 \ldots i_m} - \Gamma^p_{2 k i_2} b_{i_1 p \ldots i_m} - \ldots -$$
$$- \Gamma^p_{m k i_m} b_{i_1 i_2 \ldots p} = 2\omega_k b_{i_1 i_2 \ldots i_m},$$

левая часть которого называется смешанной производной тензора $b_{i_1 i_2 \ldots i_m}$.

Отсюда следует, в частности:

$$\partial_k b_{i_1 i_2 \ldots i_m} - \Gamma^p_{k i_1} b_{p i_2 \ldots i_m} - \Gamma^p_{k i_2} b_{i_1 p \ldots i_m} - \ldots -$$
$$- \Gamma^p_{k i_m} b_{i_1 i_2 \ldots p} = 2\omega_k b_{i_1 i_2 \ldots i_m},$$

где

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{m}\left(\Gamma^k_{1\,ij} + \Gamma^k_{2\,ij} + \ldots + \Gamma^k_{m\,ij}\right)$$

суть коэффициенты связности средней по отношению к данным.

Приводится неравенство, связывающее m и n и обеспечивающее возможность построения m сопряженных связностей.

Если кручение всех сопряженных связностей равно нулю, то обращение в нуль кривизны каждой из них следует из обращения в нуль кривизны всех остальных. *А. П. Норден*

5767. Об одном обобщении теоремы Гаусса. Ленуар (Une généralisation du théorème de Gauss. Lenoir Marcel), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 5, 384—385 (франц.)

Рассматривается введенное Эйнштейном (Théorie de la gravitation généralisée, Paris, 1951) четырехмерное пространство с метрическим тензором $g_{ij} (\neq g_{ji})$ и определенным образом построенной связностью $\Gamma^k_{ij} (\neq \Gamma^k_{ji})$.

Ограничиваясь случаем стационарности метрики по координате x^4, автор вводит вектор

$$H^h = -g^{hs}\Gamma^4_{4s} - g^{sh}\Gamma^4_{s4}$$

и вычисляет поток этого вектора через замкнутую поверхность S, ограничивающую объем V, в следующем виде:

$$\mathrm{flux}_S \vec{H} =$$
$$= \iiiint_V \{g^{i4} R_{i4} + g^{4i} \tilde{R}_{4i}\} \sqrt{-g}\ dx^1\ dx^2 dx^3 dx^4.$$

Здесь R_{ij} и $\tilde{R}_{ij}$ — аналоги тензора Риччи в теории Эйнштейна. *П. К. Рашевский*

5768. О геодезических пространства Эйнштейна—Шрёдингера. Виноградская (Sur les géodésiques de l'univers d'Einstein-Schrödinger. Winogradzki Judith), C. r. Acad. sci., 1954, **238**, № 9, 996—998 (франц.)

Рассматривается n-мерное пространство, в котором метрика задана невырожденным тензором g_{ij} (вообще несимметрическим), а аффинная связность — коэффициентами Γ^i_{jk}, удовлетворяющими условиям:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - g_{i\alpha}\Gamma^\alpha_{kj} - g_{\alpha j}\Gamma^\alpha_{ik} = 0.$$

Эти уравнения означают, что метрический тензор g_{ij} параллельно переносится к связности Γ^i_{jk} по любому пути. Такое пространство называется «пространством E» и является обобщением риманова пространства V_n, совпадая с ним в случае $g_{ij} = g_{ji}$.

Автор находит условия, которые нужно наложить на метрический тензор g_{ij} для того, чтобы касательный вектор dx^i / ds к любой геодезической пространства E параллельно переносился вдоль этой геодезической, т. е. чтобы его ковариантная производная была равна нулю вдоль геодезической.

Если обозначить через $g_{(ij)}$, $g_{[ij]}$ и $\Gamma^k_{(ij)}$, $\Gamma^k_{[ij]}$ соответственно симметрическую и антисимметрическую части тензора g_{ij} и коэффициентов Γ^i_{jk}, то эти условия сводятся к

$$g_{[\alpha i]}\Gamma^\alpha_{[km]} + g_{[\alpha k]}\Gamma^\alpha_{[im]} = 0.$$

Они позволяют получить явное выражение связности через метрический тензор:

$$\Gamma^i_{(jk)} = \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\},$$

$$g_{(\alpha i)}\Gamma^\alpha_{[km]} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{[km]}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{[im]}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{[ik]}}{\partial x^m}\right) +$$
$$+ g_{[\alpha k]}\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ mi \end{matrix} \right\} - g_{[\alpha m]}\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ ki \end{matrix} \right\},$$

где $\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}$ — символы Христоффеля тензора $g_{(ij)}$. *Г. И. Кручкович*

5769 Д. Приложение метода внешних форм Картана к теории интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных первого и второго порядка по двум независимым переменным. Булешев У. Б. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ин-т матем. и механ. АН УзССР, Ташкент, 1954

5770 Д. О внутренних римановых геометриях на поверхностях проективного пространства. Тевзадзе Г. Н. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Тбилисский ун-т, Тбилиси, 1954

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

5771. Об обобщении Радо задачи Крама. Эглстон (On Rado's extension of Crum's problem. Eggleston H. G.), J. London Math. Soc., 1953, 28, ч. 4, № 112, 467—471 (англ.)

Задача Крама заключается в определении наибольшего возможного числа неперекрывающихся выпуклых многогранников в трехмерном пространстве, каждые два из которых имеют двумерное пересечение. После того, как А. Безикович (Besicovitch A. S., J. London Math. Soc., 1947, 22, 285—287) ответил на поставленный Крамом вопрос, показав, что в трехмерном пространстве существуют бесконечные совокупности неперекрывающихся выпуклых многогранников, обладающих требуемыми свойствами, Р. Радо (Rado R., там же, 287—290) поставил вопрос о существовании бесконечной совокупности выпуклых многогранников n-мерного пространства такой, что каждые k из них, где $1 \leqslant k \leqslant (n+1)/2$, имеют $(n-k+1)$-мерное пересечение. Там же Радо указал на существование в n-мерном пространстве $n+2$ выпуклых многогранников, таких, что каждые k из них, где $1 \leqslant k \leqslant n$, имеют $(n-k+1)$-мерное пересечение. В работе показывается, что в n-мерном пространстве не может существовать бесконечной совокупности неперекрывающихся выпуклых многогранников, каждые k из которых, где $1 \leqslant k \leqslant 1+(n+1)/2$ (т. е. наибольшее значение k на 1 больше, чем в задаче Радо), имеют $(n-k+1)$-мерное пересечение. Кроме того, показывается, что в n-мерном пространстве не могут существовать $n+3$ многогранника, каждые k из которых, где $1 \leqslant k \leqslant n$, имеют $(n-k+1)$-мерное пересечение таким образом, результаты Р. Радо наилучшие. *И. М. Яглом*

5772. К топологической дифференциальной геометрии. Бляшке (Zur topologischen Differentialgeometrie. Blaschke W.), J. reine und angew. Math., 1953, **191**, № 1/2, 153—157(нем.)

В области G рассматриваются три семейства линий $u_i(x, y) = \text{const}$, $i = 1, 2, 3$, где $u_i(x, y)$ — аналитические функции от x, y такие, что ни один из якобианов $D(u_i, u_j) / D(x, y)$ в G не исчезает; через каждую точку G проходит по одной кривой каждого семейства; две кривые разных семейств имеют в G не более одной общей точки. Кроме того, каждая из кривых пересекается с G лишь по одной дуге (G выпукла по отношению к заданным семействам кривых). Тогда говорят, что семейства $u_i = \text{const}$ определяют соты W (Wabe W) в G. Соотношение $F(u_1, u_2, u_3) = 0$, при котором три кривые проходят через одну точку, называется функцией сот (Wabenfunktion). Вводятся пфаффовы формы $\sigma_i = f_i(x, y)\, du_i = p_i dx + q_i dy$; множители f_i подчиняются условию $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$; σ_i определены с точностью до общ его множителя $g(x, y)$: $\sigma_i^* = \sigma_i / g$. Для внешних произведений получается $[\sigma_2\sigma_3] = [\sigma_3\sigma_1] = [\sigma_1\sigma_2] = \Omega$, причем Ω при нормировании переходит в $\Omega^* = \Omega / g^2$.

С введением внешних дифференциалов $d\sigma_i = h_i\Omega$, $h_1 + h_2 + h_3 = 0$, строится новая форма $\gamma = h_2\sigma_1 - h_1\sigma_2$ (с круговой перестановкой), $\gamma^* = \gamma - d \ln g$. Внешний дифференциал $d\gamma = k\Omega$ определяет k — кривизну W; k является инвариантом веса 2, так как $k^* = g^2 k$. Пчелиные соты (Bienenwaben) определяются условием $k = 0$, в этом случае $F(u_1u_2u_3) = 0$ может быть приведено к виду $u_1 + u_2 + u_3 = 0$. Далее развивается аппарат инвариантного дифференцирования. Если $t(x, y)$ — инвариант веса p так, что $t^* = g^p t$, то, полагая $Dt = dt + p\gamma t$, получим $Dt^* = g^p Dt$. $\partial_j t = t_j$ вводятся с помощью равенств: $Dt = t_3\sigma_2 - t_2\sigma_3 = t_1\sigma_3 - t_3\sigma_1 = t_2\sigma_1 - t_1\sigma_2$, $t_1 + t_2 + t_3 = 0$. Тогда $t_j^* = g^{p+1} t_j$, т. е. инвариантное дифференцирование образует из инварианта веса p инвариант веса $p+1$ (в статье соответствующая формула (33) приведена с опечаткой).

Связанный с сотами формульный аппарат развивается далее и как приложение доказывается теорема Дюбурдье (J. Dubourdieu): если в пространстве имеются поверхностные соты (Flächenwabe), образованные четырьмя (в тексте ошибочно тремя) семействами поверхностей, причем на поверхностях трех семейств остальные высекают пчелиные соты, то то же справедливо и для поверхностей 4-го семейства. *В. В. Рыжков*

5773. Свойства плоских четыре-тканей общего вида. Арци (Eigenschaften von ebenen Viergeweben allgemeiner Lage. Artzy Rafael). Math. Ann., 1953, **126**, № 4, 336—342 (нем.)

Пусть точки A, B, C, D являются носителями (Träger) данной четыре-ткани, так что каждая линия из числа образующих ткань проходит хотя бы через одну из этих точек. Если никакие три носителя не лежат на одной линии, то говорят о четыре-ткани 3-го рода. В работе рассматриваются четыре-ткани 3-го рода без каких-либо предположений о непрерывности. Совпадающие линии или такие, пересечение которых принадлежит линии AB, объявляются для удобства параллельными и рассматривается вопрос о возможности развития геометрии данной четыре-ткани до плоской афинной геометрии. Сначала вводятся изоморфные между собой группы векторов на A- и B-линиях, которые существуют (коммутативны) тогда и только тогда, когда замыкаются фигуры Рейдемейстера — Томсена (K. Reidemeister, Thomsen). Эти группы автор рассматривает как мультипликативные. Далее с помощью D-линий определяется сложение векторов каждой системы, причем его коммутативность связана с замыканием некоторой новой фигуры; также рассматриваются теоремы о замыкании фигур (Schliessungssätze), связанные с ассоциативностью сложения и с односторонней дистрибутивностью умножения по отношению к сложению. Получаются системы предложений, при выполнении которых с четыре-тканью 3-го рода связывается односторонне дистрибутивная числовая система с коммутативным сложением или коммутативное числовое поле. Это позволяет ввести координатную систему и уравнения линий по отношению к ней и перейти к построению некоторого рода афинной геометрии. Приведем в качестве примера определение сложения векторов и соответствующую теорему замыкания. Пусть CX_a, CX_b — векторы на линии CA; для сложения CX_a с CX_b поступают так: пусть N — точка пересечения C-линии, параллельной к DX_a, с BX_b; $L = (AN, DX_a)$; тогда $(BL, AC) = X_{a+b}$. При таком определении сложения его коммутативность равносильна следующему: пусть C, I, K; M, N; P, Q лежат на трех различных A-линиях, I, M; K, P — на двух различных B-линиях. Пусть далее CM_c параллельно D-линии KN и CP параллельно D-линии IQ; тогда N и Q лежат на одной B-линии. *В. В. Рыжков*

5774. О диаграммах, представляющих карты. Ангар (On diagrams representing maps. Ungar Peter), J. London Math. Soc., 1953, 28, ч. 3, № 111, 336—342 (англ.)

В работе рассматриваются плоские карты, состоящие из конечного числа покрывающих всю плоскость односвязных областей (причем и объединение любых двух соседних областей является односвязным), лишь одна из которых является бесконечной; требуется еще, чтобы в узлах карты сходилось не более трех областей. Две карты называются изоморфными, если между их областями можно установить взаимно однозначное соответствие так, чтобы соседним областям (имеющим общую границу) одной карты отвечали соседние области второй карты. Доказывается (индукцией по числу областей карты), что если удовлетворяющая всем предыдущим условиям карта M такова, что она не содержит трех попарно соседних областей, объединение которых многосвязно (образует кольцо), то существует изоморфная ей карта M', бесконечная область которой представляет собой внешность прямоугольника, а остальные области являются прямоугольниками; более того, карту M' можно подобрать так, чтобы любая наперед заданная область a карты M отвечала внешности прямоугольника a' карты M', а любая соседняя с a область b карты M отвечала прямоугольнику b' карты M', общей границей которого с a' служат три стороны b' (или все четыре стороны b', если число областей карты равно 2). *И. М. Яглом*

5775. Некоторые приложения частично упорядоченных множеств. Седмак (Quelques applications des ensembles partiellement ordonnés. Sedmak Viktor), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 22, 2139—2140 (франц.)

Миллер-Душник (Miller-Dushnik, Amer. J. Math., 1941, **63**, 600—610) ввел понятие ординальной размерности d_0E упорядоченного множества $(E, \leqslant)$. Размерность d_0E определяется как нижняя грань мощностей семейств F, составленных из расширений $\leqslant_\rho$ частичного упорядочения $(E, \leqslant)$ на все E и обладающих тем свойством, что для любых $a, b \in E$ отношение $a \leqslant b$ эквивалентно тому, что $a \leqslant_\rho b$ для каждого расширения $\leqslant_\rho \in F$.

Автор рассматривает следующую проблему, которую поставил Курепа (Teorija skupova, Zagreb, 1951, 205, 441, пробл. 4): Пусть P — многогранник; обозначим через $[P]$ множество, упорядоченное отношением $\subseteq$ и состоящее из пустого множества, вершин, ребер, граней многогранника P и самого P. Требуется определить верхнюю грань размерностей $d_0[P]$. Приводятся формулировки следующих теорем

Теорема 1. Для любого многогранника P имеет место равенство $d_0[P] \geqslant 4$.

Теорема 2. Для каждого правильного многогранника, для каждой пирамиды, призмы и тел, двойственных им в трехмерном пространстве, имеет место равенство $d_0[P] = 4$.

Теорема 3. Для класса всех многогранников имеет место равенство

$$\sup_P d_0[P] = \aleph_0.$$

Даются некоторые указания на доказательства. *А. С. Есенин-Вольпин*

5776. О некоторых дифференциальных операторах. Лепаж (Sur certains opérateurs différentiels. Lepage Th. H.), Acad. roy. Belgique, Bull. cl. sci., 1953, **39**, сер. 5, № 2, 143—155 (франц.)

В $2n$-мерном пространстве $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ рассматривается совокупность внешних дифференциальных форм Ω_m степени m. Особо задается фиксированная внешняя квадратичная форма

$$\Gamma = dx_1 \wedge dp_1 + \ldots + dx_n \wedge dp_n,$$

где знак $\wedge$ обозначает внешнее в смысле Картана перемножение форм. Любая форма Ω_k степени k единственным образом представляется в виде

$$\Omega_k = \rho_k + \Omega_{k-2} \wedge \Gamma,$$

где Ω_{k-2} некоторая внешняя форма степени $k-2$, а ρ_k удовлетворяет условию

$$\rho_k \wedge \Gamma^{n-k+1} = 0$$

$(\Gamma^{n-k+1} = \Gamma \wedge \Gamma \wedge \ldots \wedge \Gamma,\ n-k+1$ раз).

Отсюда операторы q и r, определяемые формулами

$$r\Omega_k = \rho_k, \quad q\Omega_k = \Omega_{k-2}.$$

В случае $k = n+s > n$ всегда

$$\Omega_{n+s} = \Omega_{n-s} \wedge \Gamma^s, \quad r\Omega_{n+s} = 0, \quad q\Omega_{n+s} = \Omega_{n-s}.$$

Вводятся и изучаются операторы

$$D\Omega_k = dqd\Omega_k,$$

где d — оператор внешнего дифференцирования, и

$$e(f)\,\Omega_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial (dp_i)} \Omega_k, \quad f = f(x_1, \ldots, x_n),$$

действие которого на Ω_k соответствует замене в полилинейной форме, присоединенной к Ω_k, одного ряда дифференциалов $dx_1, \ldots, dx_n, dp_1, \ldots, dp_n$ величинами $0, \ldots, 0, \partial f / \partial x_1, \ldots, \partial f / \partial x_n$. При $k=n$ векторное пространство форм (ρ_n), где $\rho_n \wedge \Gamma = 0$, изоморфно пространству линейных функций $L(x, p; X)$ от миноров произвольной симметрической матрицы

$$X = \| x_{ij} \| \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

с коэффициентами — функциями от x, p. Функция $L(x, p, X)$ определяется соотношением

$$\rho_n \wedge (dp_1 - x_{1j}dx_j) \wedge (dp_2 - x_{2j}dx_j) \wedge \ldots \wedge (dp_n - x_{nj}dx_j) = L(x, p; X)\,\Gamma^n / n!$$

Операторы, установленные для ρ_n, переносятся очевидным образом и на соответствующие линейные функции $L(x, p, X)$.

Этот аппарат применяется к вычислению 1-й и 2-й вариации интеграла, взятого по n-мерной области Δ:

$$I = \int_\Delta L(u)\, dx^1 \ldots dx^n,$$

где $L(u) = L(x, p, X)$ — варьируемая функция, причем

$$u = u(x^1, \ldots, x^n),\ p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i},\ X = \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|.$$

Если интеграл I стационарен, то u удовлетворяет уравнению в частных производных 2-го порядка

$$DL(u) = 0.$$

П. К. Рашевский

ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГООБРАЗИЙ

5777. О полной кривизне замкнутых пространственных кривых. Милнор (On total curvatures of closed space curves. Milnor John), Math. Scand., 1953, 1, № 2, 289—296 (англ.)

Исследуются интегральные характеристики $\omega(C)$ и $\varkappa(C) + \tau(C)$ замкнутых кривых C третьего класса, где $\varkappa(C)$, $\omega(C)$, $\tau(C)$ — соответственно длины индикатрис касательной, нормали и бинормали.

Устанавливается, что в каждом классе изотопных друг другу кривых C нижняя граница величины $\varkappa(C) + \tau(C)$ кратна 2π; эта граница $\geqslant 2\pi n$, если кривая n раз охватывает какую-либо прямую; перечисляются типы кривых, для которых эта граница равна 4π. Для величины $\omega(C)$ приведен пример класса изотопных кривых, для которого нижняя граница $\omega(C)$ не кратна 2π и находится строго между 4π и 6π. Доказано предположение Фенхеля о том, что $\omega(C) \geqslant 4\pi$, если кручение замкнутой кривой $\geqslant 0$ и $\not\equiv 0$.

В доказательствах автор использует известное из интегральной геометрии представление полной кривизны $\varkappa(C)$ как среднего значения кривизн проекций этой кривой на плоскости различных направлений и обобщение этой формулы для абсолютного кручения, длины кривой на сфере и кривизны плоской кривой. Статья примыкает к заметке того же автора (Ann. Math., 1950, 52, 248—257), в которой исследовалась величина $\varkappa(C)$. *В. А. Залгаллер*

5778. Оценка длины кривой на поверхности. Александров А. Д., Стрельцов В. В., Докл. АН СССР, 1953, 93, № 2, 221—224

В работе оценивается длина s кривой на поверхности (или на произвольном многообразии ограниченной кривизны; см. Александров А. Д., Докл. АН СССР, 1948, 60, № 9, 1483) в зависимости от размеров области G поверхности (точнее, в зависимости от периметра p или от диаметра d области), кривизны поверхности и поворота кривой. Через ω^+ и ω^- обозначается положительная и отрицательная части кривизны области G (внутренней ее части), которые в случае многогранной поверхности представляют собой суммы положительных (соответственно отрицательных) кривизн вершин, заключенных внутри G, а в случае римановой метрики — интеграл гауссовой кривизны, распространенный по той части G, где кривизна положительна (соответственно отрицательна); в общем случае ω^+ и ω^- могут быть определены как точная верхняя граница сумм угловых избытков неперекрывающихся треугольников, заключенных в G (соответственно — точная нижняя грань сумм угловых избытков, взятая с обратным знаком; см. цитированную выше работу Александрова); через ω_L^+ обозначается положительная часть кривизны кривой L, которая понимается здесь как некоторое множество точек области G. Поворот кривой характеризуется «извиванием» σ, которое для кривой без кратных точек определяется как $\tau_r^+ + \tau_l^- - \omega_L^+$, где τ_r^+ и τ_l^+ — положительные части правого и левого поворота кривой (поворот есть аддитивная функция дуги и $\tau^+ = (\operatorname{var} \tau + \tau)/2$), а для кривой с кратными точками — определяется как сумма извиваний дуг без кратных точек и извиваний в точках деления.

В работе устанавливаются следующие зависимости между площадью S, периметром p и диаметром d области G:

1. Если $\omega^+ < 2\pi$, то $S \leqslant p^2/2(2\pi - \omega^+)$ («изопериметрическое неравенство»); равенство достигается только тогда, когда G изометрична боковой поверхности прямого кругового конуса.

2. Если область G «выпукла», т. е. ограничена кривой со всюду неотрицательным поворотом со стороны области, то $p \leqslant (\pi + \omega^-/2)\, d$ (равенство достигается только для областей, у которых каждая точка границы имеет диаметрально противоположную, $\omega^+ = 0$, а распределение ω^- подчинено некоторым условиям).

3. Если $\omega^+ \leqslant \pi$, то $d \leqslant p/2$ (равенство достигается, например, для двуугольника между двумя меридианами на сфере), а если $\pi < \omega^+ < 2\pi$, то $d \leqslant p/2 \sin(\omega^+/2)$ (равенство достигается только для склеенного боковыми сторонами равнобедренного треугольника с основанием p, боковой стороной d и углом при вершине $2\pi - \omega^+$).

Оценки длин кривых содержатся в следующих теоремах.

4. Если $\omega^+ < 2\pi$, то длина всякой кривой области G ограничена некоторой величиной, зависящей только от p, σ и ω^+ (при $\omega^+ \geqslant 2\pi$ никакие ограничения невозможны).

5. Если $\omega_0 = \omega^+ + \sigma \leqslant \pi$, то $s \leqslant p/(1 + \cos(\omega_0/2))$ (равенство достигается только тогда, когда G изометрична плоскому равнобедренному треугольнику с противоположным основанию углом $\pi - \omega^0$ и суммой сторон p, причем за L надо взять линию, соответствующую боковым сторонам треугольника); если же $\pi < \omega_0 < 2\pi$, то $s \leqslant p/\sin(\omega_0/2)$ (равенство достигается только тогда, когда G изометрична поверхности, которая получается склеиванием боковых сторон равнобедренного треугольника с основанием p и углом, противолежащим ему, равным $2\pi - \omega_0$, причем за L надо принять дважды взятую линию, соответствующую линии склеивания поверхности).

6. Если $\omega_0 = \omega^+ + \sigma < \pi$, то $s \leqslant r/\cos(\omega_0/2)$, где r — расстояние между концами L (равенство достигается только тогда, когда L вместе с кратчайшей, соединяющей ее концы, ограничивают равнобедренный треугольник с основанием r и углом, противолежащим ему, равным $\pi - \omega_0$),

7. Если $\omega_0 < \pi$, то $s \leqslant d/\cos(\omega_0/2)$ (это неравенство точно при $\omega_0 \leqslant 2\pi/3$ и при этом условии равенство в нем достигается для треугольника как и в предыдущей теореме; при ω_0, близком к π, неравенство теряет смысл) и $s < 2d/\cos(\omega_0/4)$ при ω_0, близких к π (это неравенство точнее первого, однако оно не окончательное).

8. Если $\pi \leqslant \omega_0 < 2\pi$ и область G «выпуклая», то

$s < (\pi + \omega^-/2)\, d/\sin(\omega_0/2)$, и вообще для любой области G (и при любой ω^-) $s < 3\pi d/2 \sin(\omega_0/2)$.

Задача нахождения максимумов длины кривой при данном d и $\omega_0 > 3\pi/3$ остается нерешенной.

В работе также показывается, что при $\omega_0 < 2\pi$ кривая L либо не имеет кратных точек, либо состоит из двух ветвей без кратных точек (в этом последнем случае L состоит из петли и одной или двух ветвей без кратных точек, не имеющих общих точек с петлей и областью, ею ограниченной).

И. М. Яглом

См. также: 5407, 5408, 5471, 5490, 5579, 5580, 5790

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

5779. О точности решения задачи Дирихле методом конечных разностей. Уолш, Янг (On the accuracy of the numerical solution of the Dirichlet problem by finite differences. Walsh J. L., Young David), J. Res. Nat. Bur. Standards, 1953, **51**, № 6, 343—363 (англ.)

Методом конечных разностей решается задача Дирихле для прямоугольника. Дается оценка погрешности (т. е. разности между решением разностного уравнения $U(x, y)$ и решением дифференциального уравнения $u(x, y)$), зависящая от эффективно вычисляемых величин (шага сетки, модуля непрерывности краевой функции и т. п.).

Пусть Ω — прямоугольник с вершинами $(0, 0)$, $(0, b)$, $(a, 0)$, (a, b) ($a = Ah$, $b = Bk$, A и B — целые числа) и S — граница Ω, а $L[h, k]$ — сетка с узлами (x, y), где x/h и y/k — целые числа, $\sigma = k/h$. Пусть $U(x, y)$ — решение обычного разностного аналога задачи Дирихле, принимающее на $S_L = S \cap L[h, k]$ данные краевые значения $f(x, y)$. При оценке погрешности $U(x, y) - u(x, y)$ показывается, что вместо произвольной краевой функции $f(x, y)$ можно рассматривать функции типа

$$f_s(x, y) = \begin{cases} g(x), & 0 \leqslant x \leqslant a,\ y = 0, \\ 0, & \text{если } (x, y) \text{ лежат на остальных трех сторонах } \Omega. \end{cases}$$

Доказывается теорема: Пусть $g(x)$ и ее первые $(s-2)$ производные непрерывны при $0 \leqslant x \leqslant a$; $g^{(s-1)}(x)$ всюду (за исключением, быть может, конечного числа точек) существует и непрерывна, причем в каждом интервале непрерывности она равномерно непрерывна; $g^{(s)}(x)$ существует, исключая, быть может, конечное число точек, и ограничена при $0 \leqslant x \leqslant a$. Тогда равномерно для всех $(x, y) \in \Omega_L = \Omega \cap L\ (h, k)$ $|U_2(x, y) - u_2(x, y)| \leqslant (2 + C) D_2 (h/a)$ при $s = 2$ и $|U_3(x, y) - u_3(x, y)| \leqslant (1 + Ce) D_3 (h/a)^2$ при $s = 3$,

где $C = (\pi^2/24)(1 + \sigma^2) \operatorname{cth}(\alpha\pi b/a)/\alpha e$,

$D_2 = 2(a/\pi)^2 [2J_1 (M_1/a) + M_2]$,

$D_3 = 2(a/\pi)^3 [2(J_2 + 1)(M_2/a) + M_3]$,

$\alpha = (2/\pi\sigma) \operatorname{arc\,sh} \sigma$, $J_i\ (i = 1, 2)$ означает число точек $0 < x < a$, для которых $g^{(i)}(x)$ не существует или разрывна, $M_i\ (i = 1, 2, 3)$ есть верхняя грань $g^{(i)}(x)$.

Если краевая функция $f(x, y)$ имеет модуль непрерывности $\omega[\delta] = \sup |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)|$ $((x, y_1) \in S, (x_2, y_2) \in S, (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \leqslant \delta^2)$, то оценка погрешности $U(x, y) - u(x, y)$, не зависящая от производных $f(x, y)$, дается неравенством

$$|U(x, y) - u(x, y)| \leqslant \max\{I,\ 2\omega_L^* [r(hk/r^2)^{2/7}]\},$$

где $I = 16M [\lambda_a C_a \sigma^{-6/7} (a/b)^{9/14} (h/a)^{2/7} + \lambda_b C_b \sigma^{6/7} (b/a)^{9/14} (k/b)^{2/7}] + 4K \{\omega(2h) + \omega(2k) + 2M[h/a + k/b]\}$, $r = (ab)^{1/2}$,

$C_a = [\pi^2 (1 + \sigma^2)/24\alpha e] \cdot \operatorname{cth}(\alpha\pi b/a)$,

$C_b = [\pi^2 (1 + \sigma^{-2})/24\beta e] \cdot \operatorname{cth}(\beta\pi a/b)$,

$\alpha = (2/\pi\sigma) \operatorname{arcsh} \sigma$, $\beta = (2\sigma/\pi) \operatorname{arcsh}(1/\sigma)$,

$\lambda_a = (6e/a^3\pi^3) + ((27/2)/\alpha^2\pi^2 e^2)$, $\lambda_b = (6e/\beta^3\pi^3) + ((27/2)/\beta^2\pi^2 e^2)$,

$M = \max\limits_{(x, y) \in S} u(x, y) - \min\limits_{(x, y) \in S} u(x, y)$, $\omega_L^*(\delta) = \omega[2^{1/2}\{(r\delta)^{1/2} + h + k\}] + (M/2)\nu(1/2) \cdot (\delta/r)^{1/2}$,

$\nu(b/a) = [4 + \pi^2 \operatorname{cth}^2(\pi b/a)]^{1/2}$ $(\nu(1/2) \approx 3{,}97)$.

Далее при помощи разностного аналога альтернирующего процесса Шварца метод оценки погрешности для прямоугольника переносится на области, образованные перекрывающимися прямоугольниками. При доказательстве утверждений статьи установлены и использованы некоторые свойства разностного аналога гармонической меры. *Л. И. Камынин*

5780. Численное решение интегральных уравнений Вольтерра. Вагнер (On the numeical solution of Volterra integral equations. Wagner Carl), J. Math. and Phys., 1954, **32**, № 4, 289—301 (англ.)

Если в интегральном уравнении

$$\varphi(x) = f(x) - g(x) \int_0^x \varphi(z) K(x, z)\, dz,$$

где φ — искомая функция, а f, g, K — заданные функции, считая $x = nh$ и $z = \nu h$, заменить интеграл квадратурной суммой

$$\int_0^x \varphi(z) K(x, z)\, dz \approx \sum_{\nu=0}^{n} A(n, \nu) \varphi(\nu h), \qquad (1)$$

получится рекуррентная формула, позволяющая последовательно вычислять значения $\varphi(nh)$:

$$\varphi(nh) = \left[f(nh) - g(nh) \sum_{\nu=0}^{n-1} A(n, \nu) \varphi(\nu h)\right] \times [1 + g(nh) A(n, n)]^{-1}. \qquad (2)$$

Рассмотрена схема вычислений для частного случая, когда квадратурная сумма (1) получается в результате квадратного интерполирования φ на

каждой паре смежных интервалов. Применение формул автора требует четности n и вычисления по ним могут быть выполнены для $n = 2, 4, 6, \ldots$. Для применения их при нечетном n предлагается каким-либо путем найти $\varphi\left(\frac{h}{2}\right)$ и затем подсчитать $\varphi(h)$ по формулам, применяя их к двойному промежутку $[(0, 1/2), (1/2, 1)]$. После этого вычисления могут быть продолжены по формулам автора для $n = 3, 5, 7, \ldots$.

Указывается на возможность переноса вычислительной схемы на нелинейные уравнения.

Когда ядро K зависит от разности аргументов: $K = K(x - z)$, вычислительная схема значительно упрощается. Приведен пример решения уравнения с ядром $K = (x - z)^{-1/2}$. Вычисления показали удовлетворительную точность результатов. *В. И. Крылов*

5781. **Теория итерационных методов для численного решения систем линейных алгебраических уравнений.** **Вегнер** (Contributi alla teoria dei procedimenti iterativi per la risoluzione numerica dei sistemi di equazioni lineari algebriche. Wegner Udo), Atti Accad. naz. Lincei Mem. cl. sci. fis.—mat. e natur., 1953, сер. 8, **4**, № 1, 1—48 (итал.)

Реферируемая работа является переводом на итальянский язык доклада автора, представленного Академии.

Первая часть работы посвящена вопросу оценок собственных значений матрицы. Автор приводит большое количество оценок для собственных значений матриц различной природы. Приводятся оценки для собственных чисел матриц вида $P^{-1}A$, где P — положительно определенная матрица.

Даются оценки снизу для собственных чисел положительно определенных матриц (например, $\lambda_\nu \geqslant s - \sqrt[n]{s^n - nd(n-1)^{n-1}}$, где n — порядок матрицы, s — ее след, d — определитель) так же, как и оценка сверху (например, $\lambda_\nu \leqslant \mu_0 = x_0^{n-1}$, где x_0 есть наибольший положительный корень уравнения $x^n - sx + (n-1)\sqrt[n-1]{d} = 0$). Приводятся оценки собственных значений для матриц с положительными элементами. Для симметрических матриц описаны итерационные методы для получения оценок наибольшего собственного числа.

Во второй части работы излагаются с общей точки зрения линейные итерационные методы для решения системы $Ax = z$. Сформулировано основное предположение автора о том, что все линейные итерационные методы являются частными случаями общего итерационного процесса, в котором $(m+1)$-ое приближение определяется в виде

$$x^*_{m+1} = x^*_m - P_m(Bx^*_m - z^*),$$

$$x_{m+1} = Qx^*_{m+1} + a, \quad m = 0, 1, \ldots$$

Здесь x^*_0 — произвольно выбранный начальный вектор, a и z^* — векторы, Q и B — матрицы, зависящие от элементов матрицы A и компонент вектора z, P_m — матрица, которая может зависеть и от номера шага итерационного процесса.

Однако во второй части рассматриваются только процессы, в которых $a = 0$, $B = A$, $z^* = z$, т. е. процессы, при которых

$$x^*_{m+1} = x_{m+1},$$
$$x_{m+1} = x_m - P_m(Ax_m - z).$$

Даются достаточные критерии сходимости для следующих случаев:

I. $A = R + S$, A симметрическая, R неособенная, $P_m = R^{-1}$.

В частности, доказывается сходимость процесса в случае, если R и S симметрические, $R + S$ и $R - S$ положительно определенные.

II. A — неособенная матрица с комплексными элементами. Доказывается сходимость процесса в случае, когда $P_m = -\bar{A}'U$, где U — диагональная матрица с элементами

$$u_i = \frac{2M_i}{(M_1 + \cdots + M_n)s_i}, \quad s_i = \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2, \quad M_i > 0$$

произвольны.

III. Даются критерии сходимости процессов для систем с неособенной матрицей A и для систем с матрицей вида $A = \mu U - E$, в которых матрицы P_m, меняясь от шага к шагу, периодически повторяются. *В. Н. Фаддеева*

5782. **О методе Ричардсона для решения линейных систем с положительно определенными матрицами.** **Янг** (On Richardson's method for solving linear systems with positive definite matrices. Young David), J. Math. and Phys., 1954, **32**, № 4, 243—255 (англ.)

Исследуется итерационный процесс

$$u_n = u_{n-1} + \beta_n(Au_{n-1} + d)$$

для нахождения решения линейной системы $Au + d = 0$ с положительно определенной матрицей A, который автор связывает с именем Ричардсона (Richardson L. F., Roy. Soc. Phil. Trans., 1910, **A210**, 307—357).

Известно, что процесс сходится, если в качестве β_n брать достаточно малое по абсолютной величине отрицательное число, например, $\beta = -[2/(b-a)]$, где b и a — верхняя и нижняя границы для собственных значений матрицы A (Натансон И. П., Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та, 1948, 64). Известно, что быстрота сходимости процесса может быть улучшена (Бирман М. Ш., Вестн. Ленингр. ун-та, 1952, **9**, 69—76), если объединить m шагов процесса в один шаг и определить постоянные β_k, $k = 1, \ldots, m$, используя теорию многочленов Чебышева. Последний процесс эквивалентен простому итерационному процессу с матрицей

$$T_m = \prod_{k=1}^{m}(E + \beta_k A),$$

где $\beta_k = 2/[(b-a)t_k + (b+a)]$,

$$t_k = \cos[(2k-1)\pi/2m], \quad k = 1, \ldots, m.$$

Автор связывает быстроту сходимости процесса итераций с матрицей T с числом $R(T) = -\log \Lambda$, где Λ — спектральная норма T, т. е. максимум абсолютных величин собственных значений T.

Указывается, что если $R(T) > 0$, то число шагов итерационного процесса, обеспечивающих наперед заданную точность, будет асимптотически обратно пропорционально $R(T)$. В работе установлено, что $R_m = (-1/m) \log \Gamma_m$ (где Γ_m — спектральная норма T_m) убывает не быстрее, чем $\sqrt{R_1}$ при малых R_1 и при условии, что для каждого R_1 m берется достаточно большим. Установлено, например, что для разностной системы, возникающей при решении задачи Дирихле, $R_1 = \frac{1}{2}\pi^2 h^2 + O(h^4)$, где h — размер клетки. Отсюда при малых h $R_m \approx \frac{1}{2}\pi h$. Исследуется зависимость R_m от точности определения величины a, вопрос влияния ошибок округления и в связи с этим вопрос о порядке размещения чисел β_k внутри цикла. Приводится сравнение с другими методами и, в частности, с методом верхних релаксаций. *В. Н. Фаддеева*

5783. О верхних и нижних релаксациях в теории циклического одношагового итерационного процесса. Островский (On over and under relaxation in the theory of the cyclic single step iteration. Ostrowski A.), Math. Tables and other Aids Comput., 1953, 7, № 43, 152—159 (англ.)

При решении линейной системы $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = y_i$, $i = 1, \ldots, n$, наряду с методом Зейделя (циклический одношаговый процесс, полная релаксация) можно искать решение при помощи процесса неполной релаксации по формуле

$$a_{kk} x_k^{(e)} = a_{kk} x_k^{(e-1)} - q_e \sum_{i=k}^{n} a_{ki} x_i^{(e-1)} - q_e \sum_{i=1}^{k-1} a_{ki} x^{(e)}.$$

Формула написана в предположении, что $y_i = 0$, что не нарушает общности при исследовании сходимости процесса. Постоянное q_e может меняться на каждом шагу. Процесс, в котором $0 < q_e < 1$, носит название процесса нижних релаксаций, процесс, в котором $1 < q_e < 2$, — процесса верхних релаксаций. Полной релаксации отвечает $q_e = 1$.

Изучение сходимости этих процессов и быстроты сходимости в случае, когда $q_e = q$, связано с изучением величины Λ_q модуля наибольшего собственного значения матрицы $Q_q = (D + qL)^{-1}[(1-q)D - qR]$, где $A = L + D + R$ — разложение матрицы A на сумму треугольных матриц L и R и диагональной матрицы D. Автор исследует вопрос о сходимости и о быстроте сходимости релаксационных процессов для неособенных матриц 2-го порядка. Устанавливается, что характер сходимости рассматриваемых процессов определяется величиной числа $u = (a_{12} a_{21})/(a_{11} a_{22})$.

Показано, что в то время как процесс Зейделя для произвольно выбранного начального вектора сходится только в случае, когда $|u| < 1$, во многих случаях можно выбрать постоянное q так, чтобы процесс неполной релаксации сходился.

Показано также, что во всех случаях, когда процесс Зейделя сходится, быстроту сходимости можно увеличить выбором подходящей постоянной в процессе неполной релаксации. Именно, доказаны четыре теоремы:

1. Если $u > 1$, то для всех q из (0,2) процесс расходится.

2. Если $u < 1$ и $q_0 = 2/(1 + \sqrt{1-u})$, то Λ_q монотонно убывает для $q < q_0$ и монотонно возрастает для $q > q_0$, так что $\Lambda_{\text{opt}} = |u|/(1 + \sqrt{1-u})^2$.

3. Пусть $u < 0$. Необходимое и достаточное условие сходимости процесса релаксации состоит в том, чтобы $0 < q < q_1 = 2/(1 + \sqrt{|u|})$. При $0 < u < 1$ процесс сходится при любом $0 < q < 2$.

4. Пусть $|u| < 1$. Для того чтобы Λ_q было меньше, чем Λ_1, необходимо и достаточно, чтобы q было заключено внутри интервала $(1, 1+u)$.

Приводится пример, иллюстрирующий улучшение сходимости при переходе к процессу неполной релаксации. *В. Н. Фаддеева*

5784. О точности решения систем линейных уравнений. Лаврентьев М. М., Матем. сб., 1954, 34(76), № 2, 259—268

Рассматривается система линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Предполагается, что $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = 1$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ или $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Наряду с (1) рассматриваются системы

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i + \varepsilon_i \tag{1'}$$

и

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + \varepsilon_{ij}) x_j = b_i, \tag{1''}$$

причем $\| \varepsilon \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2} < \varepsilon'$ и $\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_{ij}^2} < \varepsilon''$.

Обозначим решения систем (1), (1'), (1'') соответственно $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x' = (x_1', x_2', \ldots, x_n')$, $x'' = (x_1'', x_2'', \ldots, x_n'')$. Доказываются следующие утверждения:

1) $\| x - x' \| < \frac{\sqrt{e}}{\Delta} \varepsilon'$, где $\Delta \neq 0$ — абсолютная величина определителя системы (1).

2) Если $\varepsilon'' < \frac{\Delta}{\sqrt{e}}$, то система (1'') невырождена и

$$\| x - x'' \| < \frac{e \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\, \varepsilon''}{\Delta^2 \left(1 - \frac{\varepsilon'' \sqrt{e}}{\Delta}\right)}.$$

Пусть существует система чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (неизвестных), о которой известно, что она гладкая, т. е. $|x_i - x_{i+1}| < \lambda/n$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, где λ — постоянная, не зависящая от n, и выполнено неравенство $\| x - x^0 \| < \alpha$, где

$x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ — известный вектор. Указан способ для построения гладкой системы чисел $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ таких, что

$$|\bar{x}_i - x_i| < \frac{\sqrt[3]{6\lambda}\,\alpha^{1/3}}{\sqrt[3]{n}} + o(n^{-1/3})$$

($i = 1, 2, \ldots, n$) (в работе описка: $O(n^{-1/3})$). Это позволяет повышать точность решения системы (1), у которой числа b_i или числа a_{ij} известны приближенно, если заранее известно, что решение системы (1) гладкое. *И. П. Мысовских*

5785. **Об ошибках при обращении матрицы. Дуайр, Уо** (On errors in matrix inversion. Dwyer Paul S., Waugh Frederick V.) J. Amer. Statist. Assoc., 1953, **48**, № 262, 289— 319 (англ.)

Пусть $T = A + E$, где матрица ошибок $E = (e_{ij})$ такова, что $|e_{ij}| < \eta$. Пусть $A^{-1} = C = (c_{ij})$ — обращение матрицы A, $N(EC) < 1$. Исследуется матрица расхождения $D = T^{-1} - A^{-1} = -CEC[I - EC + (EC)^2 - \ldots]$. Для элементов матрицы D дается оценка, верная при условии $\eta < 1 / \sum_i \sum_j |c_{ij}|$:

$$d_{rs} \leqslant B(d_{rs}) = \frac{\eta \sum_j |c_{rj}| \sum_i |c_{is}|}{1 - \eta \sum_i \sum_j |c_{ij}|}.$$

Указывается, что эта оценка родственна оценке Лонсета (Lonseth A. T., Trans. Amer. Math. Soc., 1947, **62**, 193—212) для решения линейной системы.

Рассматривается вопрос о такой расстановке знаков у элементов матрицы ошибок, при которой для каждого данного элемента обратной матрицы получается наибольшее расхождение. Рекомендуются несколько методов для вычисления этих экстремальных расхождений. При этом рассматривается как случай, когда $|e_{ij}| < \eta$, так и случай, когда $|e_{ij}| < \eta_{ij}$. *В. Н. Фаддеева*

5786. **Нахождение характеристического полинома квадратной матрицы. Сейбл, Берджер** (On finding the characteristic equation of a square matrix. Saibel Edward, Berger W. J.), Math. Tables and other Aids Comput., 1953, **7**, № 44, 228—236 (англ.)

Метод Хессенберга (Zurmühl R., Matrizen, Berlin, 1950, 316—322) сводит построение характеристического полинома для матрицы A к построению характеристического полинома подобной матрицы $P = Z^{-1}AZ$. Элементы матриц

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \ldots & p_{1n} \\ -1 & p_{22} & p_{23} & \ldots & p_{2n} \\ 0 & -1 & p_{33} & \ldots & p_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & p_{nn} \end{pmatrix},$$

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & z_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & z_{32} & z_{33} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & z_{n2} & z_{n3} & \ldots & z_{nn} \end{pmatrix}$$

находятся из рекуррентной системы $AZ + ZP = 0$. Характеристический полином для P находится непосредственным раскрытием определителя $|P + \lambda E|$. Авторы рекомендуют находить коэффициенты этого характеристического полинома, используя соотношение Гамильтона—Кели (метод акад. А. Н. Крылова, см. Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, Гостехиздат, М.—Л., 1950, 149—158). Дается подсчет числа операций. *В. Н. Фаддеева*

5787. **Векторный метод для решения совместных линейных уравнений. Перселл** (The vector method of solving simultaneous linear equations. Purcell Everett W.), J. Math. and Phys., 1953, **32**, № 2—3, 180—183 (англ.)

Дается метод решения систем линейных уравнений, по мнению автора, более удобный чем другие при использовании вычислительных машин типа электронной вычислительной машины ИБМ с программированием на перфокартах (IBM Card Programmed Calculator). Для описания метода система записывается в виде однородной

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + a_{1,n+1}t &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + a_{n,n+1}t &= 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Процесс решения сводится к последовательному построению базисов цепочки подпространств $R_{n+1} \supset \supset R_n \supset \ldots \supset R_1$, где R_{n+1-j} — пространство решений первых j уравнений системы (1). R_{n+1-j} состоит из векторов, ортогональных к векторам V_i, $i = 1, \ldots, j$, где $V_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$. В качестве базиса R_{n+1} берется система векторов $V_1^0 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, V_{n+1}^0 = (0, 0, \ldots, 1)$.

Векторы V_i^1, $i = 1, \ldots, n$, базиса R_n ищутся в виде $V_i^1 = V_{i+1}^0 + C_i^1 V_1^0$, векторы V_i^2, $i = 1, \ldots, n-1$, базиса R_{n-1} — в виде $V_i^2 = V_{i+1}^1 + C_i^2 V_1^1$ и т. д. Коэффициенты C_i^j вычисляются по формуле

$$C_i^j = -\frac{V_j V_{1+i}^{j-1}}{V_j V_1^{j-1}}.$$

Вектор V_1^n дает решение системы (1). Его последняя координата при этом процессе получается равной единице. Указывается, что число операций умножения равно $\frac{1}{6}(n-1)n(2n+5)$, а достаточное число ячеек запоминающего устройства равно $\left[\frac{n^2}{4} + n + 2\right]$. Описывается применение метода для вычисления определителей. *В. Н. Фаддеева*

5788. К вычислению значений функций Бесселя первого рода. Гагуа М. Б., Сообщ. АН ГрузССР, 1953, **14**, № 8, 455—458

При любых значениях z и ν бесселева функция первого рода представляется интегралом Шлефли—Сонина (Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, ч. 1, М., 1949, 195)

$$J_\nu(z) = (2\pi i)^{-1}(z/2)^\nu \int_{-\infty}^{(0+)} \exp[t - z^2/4t - (\nu+1)\lg t]\,dt.$$

Интеграл предлагается разбить на три части: 1) интеграл I_1^R по полупрямой от ∞ до $-R$, 2) интеграл I^R по окружности радиуса R с центром в точке $z=0$ и 3) интеграл I_2^R по полупрямой от точки $-R$ до $-\infty$. Для $I_1^R + I_2^R$ дается оценка в зависимости от z, ν, R. R рекомендуется выбрать настолько большим, чтобы суммой $I_1^R + I_2^R$ можно было пренебречь. Интеграл же I^R по окружности предлагается вычислить по известным формулам механических квадратур. Для случая применения к нему формулы Симпсона проведена оценка остатка. Приведен пример расчета, показывающий, что для вычисления $J_\nu(z)$ с шестью верными знаками при $z=5$ и $8 \leqslant \nu \leqslant 10$ достаточно принять $R=10$ и для вычисления интеграла по окружности по Симпсону взять около 6300 точек. Предлагаемый метод с уже известными не сравнивается. *В. И. Крылов*

5789. Применение алгебраических методов для гармонического анализа наблюдений над приливами и отливами. Араньоль (The use of algebraic methods in the harmonic analysis of tidal observations. Aragnol A.), Internat. Hydrogr. Rev., 1953, **30**, № 2, 103—109 (англ.)

Перепечатка статьи, помещенной в Bulletin d'information du Comité Central d'Océanographie et d'Etude des Côtes, 1953, № 4, 177.

Решается следующая задача. Задана некоторая эмпирическая кривая $Y = Y(t)$ при помощи эквидистантных ординат $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$, являющихся результатом наблюдений; заранее известно, что кривая состоит из синусоидальных компонент, частоты которых также известны. Требуется определить амплитуды и начальные фазы этих компонент. Таким образом, уравнение кривой имеет вид

$$Y = \sum_{j=1}^{N} A_j \cos(\omega_j t - \alpha_j).$$

Если иметь в виду какую-либо определенную j-ую компоненту

$$y_j = a_j \cos(\omega_j t - \alpha_j)$$

с периодом, содержащим n равных отрезков аргумента, то для ее ординат в точках соответствующих эквидистантных делений $y_{j0}, y_{j1}, y_{j2}, \ldots, y_{jn}$ можно подобрать такие коэффициенты $k_0, k_1, k_2, \ldots, k_n$, при которых будет иметь место равенство

$$\sum_{\lambda=0}^{n} k_\lambda y_{j\lambda} = 0. \qquad (1)$$

Если составить полином n-й степени

$$k_0 + k_1 z + k_2 z^2 + \ldots + k_n z^n = \sum_{\lambda=0}^{n} k_\lambda z^\lambda \qquad (2)$$

и если после подстановки в этот полином вместо z значения $e^{\omega j i}$ он становится равным нулю, то при тех же значениях $k_0, k_1, k_2, \ldots, k_n$ будет иметь место равенство (1). Это означает, что если выполнить преобразование

$$y = \sum_{\lambda=0}^{n} Y_\lambda k \qquad (3)$$

с теми же коэффициентами $k_0, k_1, \ldots, k_n$ над ординатами заданной кривой, то в результате получится кривая, в которой будет отсутствовать компонента с периодом $2\pi/\omega_j$. Из полученной кривой можно затем исключить аналогичным образом следующую компоненту и т. д. Приводятся виды полиномов (2), которые аннулируются при значениях $z = e^{15°ai}$, где $a = 0, 1, 2, \ldots, 23$, т. е. полиномы, при помощи коэффициентов которых можно исключить периодичности с круговыми частотами 15°, 30°, 45°, ... Так, например, при помощи коэффициентов полинома $1 - z^4 + z^8$ можно исключить периодичности с частотами $15°a$, где $a = 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$. Для океанографических целей берется $a \leqslant 8$. Вместо последовательного исключения компонент можно подбирать также определенные комбинации полиномов, при помощи которых можно сразу отсеять определенную группу синусоидальных компонент.

Однако в полученном при помощи преобразования (3) результате оставшиеся синусоиды войдут с измененными амплитудами, частотами и в общем с некоторыми сдвигами фаз. Приводится таблица этих изменений для некоторых из наиболее пригодных для указанных целей полиномов, позволяющая восстановить истинные значения оставшихся в результирующей кривой компонент. Метод разработан применительно к анализу кривых приливов и отливов, но может быть применен и для других аналогичных случаев.

Необходимо отметить, что аналогичные методы для вскрытия периодичностей применялись уже давно (Кондратьев П. А., Сложные волны, Науч. техн. отдел ВСНХ № 55, М., 1924; Ж. геофиз. и метеорол., 1927, **4**, 313—327; Cristall, Murray, Trans. Roy. Soc. Edinburgh, 1905, **45**, ч. 2; Labrouste H., Terrestrial Magnet, 1936, **41**, 15—28, 105—126; Analyse des graphiques resultants de la superpositions des sinusoïdes, 1943, Paris; Vercelli F., Ricerca scient., 1934, № 7; Comment. phys-math., 1939, **3**, № 19 и т. д.). *М. Г. Серебренников*

5790. Об одной формуле интерполирования посредством рациональных функций. Предонзан (Su una formula d'interpolazione per le funzioni

razionali. Predonzan Arno), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1953, 22, № 2, 417—425 (итал.)

С помощью средств алгебраической геометрии доказывается существование и единственность рациональной дроби, числитель и знаменатель которой имеют степень не выше n (причем второй не тождественен нулю) и которая при заданных $2n+1$ различных значениях аргумента принимает заданные значения. Приводятся некоторые соображения, имеющие целью упростить вычисления при построении этой дроби.

Интерес проблемы понижается неизбежностью приписывания «дробям» $\frac{0}{0}$ любых значений. Например, взяв $n=1$, $x=0, 1, 2$, $y=3, 1, 1$, придется считать, что дробь $\frac{x}{x}$ при $x=0$ равна 3.

Примечание референта. Результаты работы можно получить достаточно просто, не привлекая никаких геометрических соображений.

И. П. Натансон

5791. О приближенном решении уравнения пятой степени. Минкевич (Sur la résolution approchée de l'équation du cinquième degré. Minkiewicz Jan), Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska, 1951—1952, **A5**, 93—96 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (франц.; резюме польск., русск.)

Дается метод нахождения вещественного корня уравнения пятой степени вида $x^5+Ax+B=0$; к такому виду может быть приведено общее уравнение пятой степени (Weber H., Lehrbuch der Algebra, Band I, 1898, §§ 60, 80, 81; Band II, 1899, 470—493 S.; Band III, 1908, § 83).

Метод состоит в следующем: Пусть ξ — искомый корень. Вводятся три параметра α, R и ξ_1:

$$\cos\alpha=\frac{\xi}{R},\quad \cos 3\alpha=\frac{\xi_1}{R}. \tag{1}$$

Используя формулу $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$, автор получает уравнение

$$\varphi(\alpha)=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{B}{A}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{-A}}, \tag{2}$$

где $\varphi(\alpha)=\cos 3\alpha\,(^4/_3\cos^2\alpha+1)$.

Составив таблицу значений функции $\varphi(\alpha)$, находим при ее помощи приближенное значение α, после чего из первого равенства (1) получаем

$$\xi=R\cos\alpha, \tag{3}$$

где

$$R=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt[4]{-A}.$$

Достоинство метода состоит в том, что не требуется предварительного отделения корня. Однако он обладает недостатками, которые ограничивают его применимость на практике:

1. Один из недостатков указан в примечании Бернацкого (M. Biernacki), помещенном непосредственно после статьи Минкевича. Именно: так как $|\varphi(\alpha)|\leqslant{}^7/_3$, то метод этот применим лишь при условиях

$$A<0 \text{ и } \left|\frac{B}{A\sqrt[4]{-A}}\right|\leqslant\frac{14\sqrt{3}}{27}\approx 0{,}898.$$

2. Приведение общего уравнения пятой степени к виду $x^5+Ax+B=0$ сопряжено с довольно громоздкими вычислениями. *М. С. Горнштейн*

5792. Параболическая аппроксимация движения (nicielnicy). Закшевский (Aproksymacja paraboliczna drogi nicielnicy. Zakrzewski Juliusz), Przem. włókienniczy, 1953, 7, № 11—12, 256—259 (польск.)

Зависимость пути S от времени t при движении представляет собой функцию, первая и вторая производные которой в начале и в конце движения равны нулю. Исходя из этих условий, функцию аппроксимируют полиномом и максимальное значение его первой и второй производной принимают за максимальные значения скорости $V_{\max}$ и ускорения $P_{\max}$ во время движения. Получаются выражения

$$V_{\max}=\frac{15}{8}\cdot\frac{S}{t},\quad P_{\max}=\frac{10}{3}\sqrt{3}\,\frac{S}{t^2}.$$

М. Л. Бродский

5793. Графический способ нахождения среднеквадратичных (эквивалентных) величин. Губенко Т. П., Боркум М. И., Науч. зап. Ин-та машиновед. и автоматики АН УССР, 1953, 2, № 2, 97—110

Графический метод решения следующей задачи: дана некоторая фигура F, ограниченная сверху дугой кривой $y=f(x)$, где $f(x)$ — однозначная функция, не принимающая отрицательных значений, двумя ординатами $M_1=f(0)$ и $M_2=f(a)$ по бокам и отрезком оси X от $x=0$ до $x=a$ снизу; надо найти высоту прямоугольника $M_{\text{экв}}$, построенного на том же отрезке оси X и имеющего такой же момент 1-го порядка относительно оси X, как и фигура F. Это число $M_{\text{экв}}$ именуется в статье «среднеквадратичной величиной момента» (фигуры F). Для случая трапеции, когда $f(x)$ — линейная функция, $M_{\text{экв}}=\sqrt{(M_1^2+M_2^2+M_1M_2)/3}$. В случае, когда M_2 отличается от M_1 не больше чем на 25%, эта точная формула может быть заменена приближенной $M_{\text{экв}}=\sqrt{M_1M_2}$, дающей погрешность менее 1%. Рассматривается способ получения $M_{\text{экв}}$ для случая, когда график функции $y=f(x)$ есть зигзагообразная ломаная, и рекомендуется графическое построение, в котором сначала происходит замена данной ломаной линии другой ломаной, ординаты которой не убывают, причем новая фигура имеет тот же момент относительно оси X, что и прежняя, а затем эта новая фигура разбивается на ряд трапеций с разными высотами, после чего графически же получается $M_{\text{экв}}$ для всей фигуры как суммы этих трапеций. *В. М. Брадис*

5794. Номограмма для вычисления значений тригонометрической функции

$$y=\operatorname{tg}\beta=\frac{2\pi}{s}\sin\left[2\pi\left(\frac{\xi}{\lambda}\pm n\right)\right].$$

Фишер (Nomogramm zur Berechnung der trigonometrischen Funktion

$$y = \operatorname{tg}\beta = \frac{2\pi}{s}\sin\left[2\pi\left(\frac{\xi}{\lambda} \pm n\right)\right].$$

Fischer Joh.), Acta hydrophys., 1953, 1, № 3, 134—139 (нем.)

Строится номограмма для формулы

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{2\pi}{s}\sin\left[2\pi\left(\frac{\xi}{\lambda} \pm n\right)\right].$$

Эта формула представляется в виде

$$-\frac{s}{2\pi}\cdot\operatorname{tg}\beta = \frac{1 \pm \operatorname{ctg}\left(2\pi\frac{\xi}{\lambda}\right)\cdot\operatorname{tg}2\pi n}{\sin\left(2\pi\frac{\xi}{\lambda}\right)\cos 2\pi n},$$

что дает возможность построить номограмму.

А. А. Глаголев

5795. Приведение наклонных линий. Хунцикер (Réduction des distances obliques. Hunziker H.), Schweiz. Z. Vermessung, 1954, 52, № 1, 3—4 (франц.)

Предлагается при работе с теодолитом для вычисления горизонтальных линий по формуле

$$D_h = D_0\cos^2\alpha \quad \text{или} \quad D_h = D_0(1-\sin^2\alpha)$$

пользоваться номограммой для определения $\cos^2\alpha$ или $\sin^2\alpha$. *С. М. Головина*

5796. Номограмма для эксплуатации струга. Кек (Nomogramm für Schnellhobelbetriebe. Keck Günther), Glückauf, 1953, 89, № 43—44, 1103—1105 (нем.)

Статья преследует цель популяризации номографических методов среди естествоиспытателей и техников. Кратко рассматривается теория построения прямолинейных абаков Декарта, после чего строится номограмма для уравнения

$$Q = 1{,}25\,mah,$$

определяющего производительность струга при добыче угля. Условия использования номограммы заставляют автора предпочесть сетчатые номограммы номограммам из выравненных точек.

Г. Е. Джемс-Леви

5797. Вопросы прикладной математики. Борш (Chestiuni de matematică aplicată. Borș C.), Gaz. mat. și fiz., 1954, 6, № 2, 69—83 (рум.)

Популярная статья.

5798 К. Дух прикладной математики. Коулсон (The spirit of applied mathematics. Coulson C. A., 23 pp., Clarendon, Oxsford, 1953, 0.60 doll.), Bull. Amer. Math. Soc., 1953, 59, № 5, 493 (библ.)

5799 Д. Графические вычисления в школе. Кабанова К. И. Автореф. дисс. канд. пед. н., Акад. пед. н. РСФСР, М., 1954

ТАБЛИЦЫ

5800. Распространение тепла в полубесконечном твердом теле с краткой таблицей важного интеграла. Смит (Conduction of heat in the semi-infinite solid, with a short table of an important integral. Smith R. C. T.), Austral. J. Phys., 1953, 6, № 2, 127—130 (англ.)

Рассматривается вопрос о распределении температуры в полубесконечном твердом теле, удовлетворяющем следующим условиям: начальная температура равна нулю, плоскость $x = 0$ сохраняет постоянную температуру θ в течение времени T, затем становится непроницаемой для тепла.

Для $t < T$ температура определяется равенством

$$v(x,t) = \theta\left\{1 - \operatorname{erf}\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right\}.$$

Для $t > T$ температура будет

$$v(x,t) = \frac{2\theta}{\pi}\int_0^U e^{-\alpha(1+u^2)}\frac{du}{1+u^2},$$

где

$$U = \sqrt{T/(t-T)},\ \alpha = x^2/4\varkappa t.$$

Значения интеграла вычислены посредством разложения в ряд подинтегральной функции по степеням U (для $U < 1$) или по степеням $1/U$ (для $U > 1$).

Приведены значения интеграла с пятью знаками после запятой для $U = 0{,}1\ (0{,}1)\ 2{,}0\ (0{,}5)\ 3{,}0$ и $\alpha = 0{,}1\ (0{,}1)\ 2{,}0$, $U = 0{,}1\ (0{,}1)\ 2{,}0$ и $\alpha = 2{,}5;\ 3{,}0;\ 4{,}0;\ 5{,}0$.

Приведены также значения интеграла при $U = \infty$ для всех упомянутых α. Точность таблиц 0,7 единиц последнего знака.

Для перехода от интеграла к температуре имеются графики зависимости $x/2\sqrt{\varkappa t}$ от $\sqrt{t/T}$ при постоянных значениях $v(x,t)/\theta$. *К. Е. Чернин*

5801 К. Таблицы интегралов Френеля. 269 стр., Изд-во АН СССР, М., 1953, 23 р. 50 к.

Таблицы содержат значения интегралов Френеля

$$S(x) = \int_0^x \sin\frac{\pi}{2}t^2\,dt \quad \text{и} \quad C(x) = \int_0^x \cos\frac{\pi}{2}t^2\,dt$$

с 7 десятичными знаками для $x = 0\ (0{,}001)\ 25$.

Опорные значения для $x = 1\ (1)\ 25$ были вычислены рядами, после чего в каждом интервале проводилось численное интегрирование по формуле Симпсона с шагом $h = 0{,}0005$. Утверждается, что погрешность табличных значений не превышает $0{,}6\cdot10^{-8}$.

В кратком введении приведены ряды (Тейлора и асимптотический) для $S(x)$ и $C(x)$, графики этих функций и указания по интерполяции.

Для интерполяции рекомендуется применять формулу Бесселя, погрешность которой составляет 1,5—1,9 единиц 7-го знака. В связи с этим в таблицах помещены значения $\Delta^2_{1/2}$, а в конце книги даны таблицы интерполяционного коэффициента $t(1-t)/2$ с четырьмя десятичными знаками для $t = 0\ (0{,}001)\ 1$, повторенные на отдельной вкладке. На другой вкладке дана номограмма, позволяющая получать поправку на вторую разность по $\Delta^2_{1/2}$ и t.

Настоящие таблицы являются наиболее подробными из опубликованных до настоящего времени. Известны лишь пятизначные таблицы $S(x)$ и $C(x)$ для $x = 0\,(0{,}01)\,20$ (Wijngaarden A. van, Scheen W. L., Table of Fresnel integrals, Verhandelingen Kon. Nederl. Akad. van Wetenschappen, Afd. Natuurkunde, v. 19, № 4, 1949, Amsterdam) и ряд менее точных таблиц (см., например, Янке, Эмде, Таблицы функций, Гостехиздат, 1949). В журнале Math. Tables and other Aids Comput. (1953, 7, № 43, 189) имеется сообщение о таблицах $S(\sqrt{2x/\pi})$ и $C(\sqrt{2x/\pi})$ с 8 десятичными знаками для $x = 0\,(0{,}001)\,0{,}02\,(0{,}01)\,2$.

К. А. Семендяев

5802 РЕЦ. Таблицы обобщенных интегральных синуса и косинуса и связанных с ними комплексных функций. Блейк (Tables of associated sine and cosine integral functions and of related complex-valued functions. Bleick W. E., 103 pp., U.S.N. Bureau of Ships, Technical Report № 10, Monterey, 1953, mimeographed) [**Рецензия: Бланч** (Blanch G.), Math. Tables and other Aids Comput., 1953, 7, № 44, 242—243 (англ.)]

На плоскости с разрезом по отрицательной действительной оси определяются функции

$$\mathrm{Si}(x+iy) = \int_{0+iy}^{x+iy} t^{-1}\sin t\,dt;$$

$$\mathrm{Ci}(x+iy) = \int_{\infty+iy}^{x+iy} t^{-1}\cos t\,dt.$$

Через действительную и мнимую части этих функций, а также через гиперболические функции и $\mathrm{Ei}(\pm y)$ выражаются интегралы

$$\mathrm{Sia}(x, y) = \int_0^x \frac{t\sin t}{t^2+y^2}\,dt;\quad \mathrm{Cia}(x, y) = \int_\infty^x \frac{t\cos t}{t^2+y^2}\,dt.$$

Таблицы содержат с 12 десятичными знаками (последние 2 ненадежные) значения действительной и мнимой частей $\mathrm{Si}(x+iy)$ и $\mathrm{Ci}(x+iy)$, а также $\mathrm{Sia}(x, y)$ и $\mathrm{Cia}(x, y)$ для $x, y = 0\,(0{,}1)\,3{,}1$ (исключая начало координат).

В рецензии отмечается, что определение $\mathrm{Si}(x+iy)$ отличается от общепринятого. *К. А. Семендяев*

5803 РЕЦ. Таблица обращения гамма-функции комплексного аргумента. Стэнли, Уилкс (Table of the reciprocal of the gamma function for complex argument. Stanley J. P., Wilkes M. V., 103 pp., Geoffrey Cumberlege, London, 1953, 36 s.) [**Рецензия: Флетчер** (Fletcher A.), Math. Gaz., 1954, 38, № 323, 56 (англ.)]

Отмечается, что вычисления были произведены на машине ЭДСАК (EDSAC).

5804 РЕЦ. Шестизначные таблицы тригонометрических функций. Петерс (Sechsstellige Tafel der trigonometrischen Funktionen. Peters J., 4. Aufl., VIII + 293 S., Dümmlers Verlag, Bonn, 1953, 35 DM) [**Рецензия: Штейнхаузер** (Steinhauser F.), Arch. Meteorol., Geophys. und Bioklimatol., 1953, 6, № 2, 252 (нем.)]

См. также: 5527, 5540, 5556 Д, 5562, 5563, 5578, 5584, 5591, 5593, 5606, 5610, 5657

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

5805. Электронные вычисления в экономической статистике. Браун, Хаутхаккер, Прейс (Electronic computation in economic statistics. Brown J. A. C., Houthakker H. S., Prais S. J.), J. Amer. Statist. Assoc., 1953, 48, № 263, 414—428 (англ.)

После краткого общего описания машины ЭДСАК и принципов программирования на ней авторы проводят сравнение электронных машин со счетно-аналитическими. Отмечается, что при большом количестве обрабатываемых данных для записи их, систематизации и суммирования более выгодны счетно-аналитические машины, и только окончательное определение необходимых характеристик лучше делать на электронной машине. Это положение может измениться по мере развития запоминающих устройств и устройств ввода и вывода, а также в связи с появлением электронных вычислительных устройств в комплекте счетно-аналитических машин.

Существенным является составление программ для широкого круга задач, так как решение на электронной машине единичных задач без готовых программ является невыгодным. В настоящее время в Англии час работы на электронной машине, по подсчетам авторов, стоит примерно в 100 раз дороже часа работы настольной машины и в 25 раз дороже часа работы счетно-аналитических машин.

Далее отмечается, что при составлении программ приходится удовлетворять различным требованиям: 1) сокращать время работы машины, 2) сокращать объем программы, чтобы экономить место в запоминающем устройстве, 3) обеспечить необходимую точность вычислений, что часто связано с осложнениями на машине с фиксированной запятой, 4) обеспечивать охват по возможности более широкого круга задач, 5) максимально упрощать построение программы, чтобы облегчить ее проверку.

В заключение приводятся некоторые примеры задач, решенных на машине ЭДСАК, главным образом по нахождению линий регрессии. Указывается, что обращение по методу Холецкого матрицы 11-го порядка требует около 5 мин., обращение 20 матриц 5-го порядка, включая контрольное обратное обращение, занимает 30 мин. Для нелинейной регрессии оказывается удобным проводить непосредственно итеративным путем минимизацию суммы квадратов невязок.

Отмечается, что использование электронных машин позволяет значительно облегчить работу по

анализу регрессии, особенно в случае многих переменных. *К. А. Семендяев*

5806. Релейная счетная машина с программным управлением для массовых геодезических вычислений. Элленбергер (Programmgesteuerte Relaisrechenmaschine für geodätische Massenberechnungen. Ellenberger), Z. Vermessungswesen, 1953, **78**, № 10, 351—352 (нем.)

В немецком Геодезическом исследовательском институте в Мюнхене под руководством Зейферса (H. Seifers) построена релейная счетная машина с программным управлением. Машина работает в двоичной системе; число двоичных разрядов 23. Вычисления по алгебраическим и тригонометрическим формулам ведутся с точностью до 10^{-6}. Исходные числовые данные и результаты выражаются в десятичной системе. Синус, косинус и арксинус вычисляются с помощью степенных рядов. Встроенные в машину коэффициенты рядов подобраны с помощью полиномов Чебышева, что позволяет для получения значений с точностью 10^{-6} брать в ряду для синуса 4 члена, а в ряду для арксинуса 7 членов. Машина приспособлена для вычислений по 14 формулам, употребляющимся в землеустроительных и съемочных работах. *С. Л. Хубларова*

5807. Цифровая вычислительная машина на полупроводниковых триодах (Transistorized digital computer), Aviat. Week, 1954, **61**, № 6, 46 (англ).

Краткое сообщение о разработке фирмой «Белл» (Bell Telephone Laboratories) экспериментальной цифровой вычислительной машины, выполненной целиком на полупроводниковых триодах (за исключением источника питания для генератора импульсов). Машина последовательного типа, работает на частоте 1 *Мгц*, оперируя с 16-значными двоичными числами; время сложения и вычитания 16 μ сек., умножения и деления 300 μ сек. Полная потребляемая мощность меньше 100 *вт*, что особенно существенно с точки зрения охлаждения. Машина, названная ТРАДИК (TRADIC), изготовлена при содействии Военно-воздушных сил США. *Д. П.*

5808. ТРАДИК оказывается надежным (TRADIC proves reliable), Aviat. Week, 1954, **61**, № 6, 46 (англ.)

На недавней конференции по авиационной электронике в Дайтоне сообщено, что ТРАДИК (см. реф. 5807) испытывался в течение двух месяцев при непрерывной работе 24 часа в сутки. За это время было зарегистрировано два случая катастрофического разрушения полупроводниковых триодов и ни одного случая выхода из строя сопротивлений, конденсаторов, трансформаторов, или какого-либо из 13 000 диодов, установленных в машине. 8 полупроводниковых триодов были заменены за это время в результате профилактического наблюдения. *Д. П.*

5809. Расчетный стол в Пердью. Итон (Purdue network analyzer. Eaton J. R.), Purdue Engr, 1953, **48**, № 7, 18, 44, 48, 50 (англ.)

Расчетный стол в университете Пердью (Уэст-Лафайетт, шт. Индиана, США) построен на средства ряда компаний США, ведающих снабжением электрической энергией и газом городов и промышленности штатов Индиана, Кентукки и Огайо. Расчетный стол предназначен для анализа существующих и проектируемых электрических энергосистем, а также может быть приспособлен для исследования систем водопровода, газопровода и др. Стол содержит 16 генераторных элементов, 160 *RLC*-элементов 40 *R*-элементов и 100 других элементов (трансформаторы и т. д.). Элементы имеют индивидуальную регулировку. Соединение элементов производится на коммутационном поле. Расчетный стол позволяет решать задачи по выбору наиболее экономичной структуры проектируемых энергосистем, определению экономичных режимов работы существующих энергосистем и др. *Е. А. Волков*

5810. Относительные преимущества переменного и постоянного тока как источника сигналов в электрических моделях. Симпкин (The relative merits of A. C. and D. C. as a signal source in analogue computors. Simpkin K. H.), Electronic Engng, 1953, **25**, № 304, 230—233 (англ.)

Автор производит поверхностное сравнение преимуществ постоянного и переменного тока для питания элементов схем моделей и устройств для решения дифференциальных уравнений (главным образом электромеханических с применением нелинейных потенциометров) и приходит к выводу, что нет оснований утверждать, что какая-либо из двух систем имеет существенные преимущества перед другой. Выбор той или другой системы зависит от конкретных условий и склонностей конструктора. Применение комбинированной системы, использующей и постоянный и переменный ток, по мнению автора, нецелесообразно. *Н. В. Корольков*

5811. Коллоквиум по счетным устройствам в Гёттингене. Бирман (Kolloquium über Rechenanlagen in Göttingen. Biermann L.), Phys. Blätter, 1953, **9**, № 5, 231—233 (нем.)

Сообщение о проведенном 19—21 марта 1953 г. в Гёттингене совещании, посвященном ведущимся в Западной Германии и Швейцарии работам по быстродействующим автоматическим машинам.

В ряде докладов описывались готовые и почти готовые машины в Дармштадте, Гёттингене (РЖМат, 1953, 479, 1432, 1483) и Мюнхене. Основное запоминающее устройство этих машин — магнитный барабан. В отличие от первых двух, в Мюнхенской машине применен параллельный принцип передачи кодов. Были сделаны также сообщения о некоторых вычислительных работах, проведенных на действующих машинах G1 (Гёттинген), Z4 (Цюрих) и Z5.

Несколько специальных технических докладов было сделано о запоминающих устройствах на магнитном барабане и об арифметических устройствах. Вопросам программирования было посвящено четыре доклада.

Кроме того, были сделаны доклады о решении систем линейных уравнений на автоматических машинах, о взаимодействии автоматических машин со счетно-аналитическими машинами, о схеме специальной машины для нужд кристаллографии, суммирующей ряды Фурье, и о связи программ с так называемыми «исчислимыми» функциями математической логики. *К. А. Семендяев*

5812. Коллоквиум по счетным устройствам. Камке (Kolloquium über Rechenanlagen. Kamke), Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1953, **56**, № 2—3, Abt. 2, 68—69 (нем.)

См. реф. 5811. Дается полный перечень докладов. Сообщается, что в совещании принимало участие свыше ста человек. *К. С.*

5813. Электронные вычислительные машины. Хомороди (Nagyteljesítményü számológépek. Homoródi Lajos), Földméréstani közlemények, 1954, 6, № 1, 55—63 (венг.; резюме франц.)

Дается общее представление о моделирующих устройствах и более подробно описываются принципы работы и элементы цифровых электронных вычислительных машин. Специально говорится об использовании электронных машин для геодезических вычислений. В качестве примера приводится выполненная в США для 7 000 пунктов работа по пересчету координат Ламберта в координаты Гаусса — Крюгера. Указывается, что в Мюнхенском Геодезическом институте строится специальная автоматическая счетная машина для геодезических вычислений (см. реф. 5806). *Д. П.*

5814. Новое в области цифровых вычислительных машин (Digital Computer Newsletter, 1953, 5, январь, 8 стр. Изд. Исследовательского управления Военно-морского флота (Office of Naval Research)) (англ.)

Содержание номера следующее:

1. Вычислительные машины военно-морского испытательного полигона;
2. «Вихрь-1»;
3. Автоматическая вычислительная машина муровской школы;
4. СВАК;
5. Вычислительные машины испытательного полигона в Абердине: ОРДВАК, ЭДВАК, ЭНИАК, машина фирмы «Белл», машина ИБМ с программированием на перфокартах (IBM-CPC);
6. Вычислительная машина «Круг» (The Circle Computer);
7. Вычислительная машина ДЖЕНКОМП фирмы «Джекобс» (Jacobs Instrument Co.);
8. Вычислительные машины ЭЛЕКОМ;
9. Вычислительная машина ИЛЛИАК (ILLIAC) Иллинойского университета;
10. Вычислительная машина фирмы «Хьюз» (Hughes Aircraft Co.).

Устройства для ввода и вывода данных и преобразователи

1. «Летающая пишущая машинка» (Flying Typewriter);
2. Характрон (The Charactron).

Перечень организаций, выполняющих вычислительные работы.

Перевод из Math. Tables and other Aids Comput., 1953, 7, № 43, 200.

5815. Новое в области цифровых вычислительных машин (Digital Computer Newsletter, 1953, 5, апрель, 12 стр. Изд. Исследовательского управления Военно-морского флота (Office of Naval Research)) (англ.)

Содержание номера следующее:

1. Вычислительные машины военно-морского испытательного полигона;
2. «Вихрь-1»;
3. Вычислительные машины фирмы «Компьютер Рисёрч Корпорейшн» (Computer Research Corp.): КАДАК 102-А (CADAC 102-A), CRC-105, CRC-107;
4. Автоматическая вычислительная машина МСАК муровской школы (MSAC);
5. Вычислительная машина ФЛАК (FLAC) испытательного центра управляемых снарядов военно-воздушных сил;
6. СЕАК;
7. Вычислительная машина ИАС;
8. СВАК;
9. МОНРОБОТ;
10. Вычислительная машина «Круг» (The Circle Computer);
11. Вычислительная машина фирмы «Джекобс»;
12. Электронная цифровая вычислительная машина «30-201» фирмы «Консолидейтид» (Consolidated);
13. Вычислительная машина ИРА-1103;
14. Вычислительная машина корпорации «Ранд» (The Rand Corporation Computer);
15. Вычислительные машины испытательного полигона в Абердине.

Устройства для вывода данных и преобразователи

1. «Теледьюсер» (Teleducer);
2. САДИК (SADIC);
3. Построитель Бенсона — Ленера (Benson-Lehner Incremental Plotter);
4. Преобразователь непрерывных данных в цифровые фирмы «Колман» (Coleman Digitizer);
5. Ферро-резонансный триггер;
6. Автоматический повторитель кривых фирмы «Логринк» (Logrinc Automatic Graph Followers).

Перечень организаций, выполняющих вычислительные работы. Курсы по счетным машинам и численному анализу

1. Массачусетский технологический институт;
2. «Компьютер Рисёрч Корпорейшн» (Computer Research Corporation).

Перевод из Math. Tables and other Aids Comput., 1953, 7, № 43, 200.

5816. Семинар Лаборатории точности машин и приборов Института машиноведения АН СССР в 1952 и первом полугодии 1953 года. Рубин С., Изв. АН СССР, 1953, № 12, 1888—1891

На заседаниях семинара были сделаны доклады: Вольман Б. Л., Повышение точности механического интегрирования и решения обыкновенных дифференциальных уравнений при помощи импульсивного кулисно-реечного интегратора; Акушский И. Я., 1) Основы теории механизации вычислительных процессов и вопросы точности, 2) Некоторые вопросы механизации линейных вычислительных процессов; Пинскер И. П., Синтез вычислителя методом последовательного интерполирования; Пульер Ю. М., Расчет магнитных цепей индукционных счетно-решающих элементов электромашинного типа, и др.

5817. Шумы в запоминающих трубках. Уинклер, Нозик (Noise in storage tubes. Winkler Stanley, Nozick Seymour), Bull. Amer. Phys. Soc., 1953, 28, № 3, 68 (англ.)

Краткое резюме доклада, представленного на собрание Американского физического общества в Вашингтоне 20 апреля — 2 мая 1953 г.

Шумы определяются как нежелательные сигналы, которые представляют собой разницу между сигналами на входе и на выходе трубки. Шумы делятся на случайные шумы и шумы

преобразования. Случайные шумы подобны флуктуационным шумам в электронной лампе. Шум преобразования есть функция, характеризующая данную индивидуальную запоминающую трубку, и неизбежно связан с полезным сигналом. Обсуждается вопрос об источниках шумов обоих видов.

Н. Я. Матюхин

5818. Качество электронных ламп. Гандэн (Qualité des tubes électroniques. Gandin M. P.), Bull. Soc. franc. électr., 1953, **3**, № 30, 375—380 (франц.)

Качество электронной лампы определяется номинальными значениями параметров ламп и стабильностью этих значений. Стабильность определяется начальным разбросом параметров ламп, обусловленным конструкцией и технологическими причинами, и постоянством этих параметров во времени и при внешних воздействиях (удары, вибрация, изменения температуры и т. п.). Для ламп серийного производства допускается значительный разброс характеристик, например, по крутизне считается нормальным разброс в пределах ± 20%, а по мощности—20%. Средний срок службы ламп сейчас, как показывает статистика, составляет от 700 до 7500 час. и в основном зависит от потери катодом эмиссии. Часть ламп (в среднем около 2%) отбраковывается по различным причинам в течение первых десятков часов работы. Фирмы—изготовители электронных ламп— гарантируют срок службы их в течение 500 или 1000 час., в зависимости от типа, при этом допускаются изменения значений параметров в следующих пределах: крутизна до —30% для пентодов и —50% для триодов, мощность выхода до —50%.

Специальные устройства, в частности вычислительные, применяют две категории ламп: обычные приемно-усилительные и специальные, для отдельных применений. В случае применения обычных приемно-усилительных ламп вопрос о значении их параметров не подлежит обсуждению. Потребитель подбирает из существующей номенклатуры электронных ламп те типы, параметры которых удовлетворяют его требованиям. Специфичность условий работы электронных ламп в специальных устройствах вынуждает иногда производить отбор ламп с целью уменьшения первоначального разброса характеристик. Таким способом улучшают стабильность обычных приемно-усилительных ламп.

Этот способ не всегда удобен, так как затрудняется замена ламп, вышедших из строя. Специальные лампы могут быть или с параметрами, аналогичными приемно-усилительным лампам, но имеющие большую стабильность по времени, или иметь параметры, отличные от обычных ламп. Для специальных ламп номинальные характеристики могут оговаривать или работу в импульсном режиме, или в диапазоне сверхвысоких частот, или габаритные размеры, например сверхминиатюрные. Иногда особо оговаривается симметрия двойных ламп.

Условия работы электронных ламп в специальных устройствах более тяжелые, чем в радиовещательном оборудовании. Лампы, применяемые в вычислительных устройствах, часто должны долгое время находиться при значительных отрицательных напряжениях на управляющей сетке. Лампы, используемые в авиационных или ракетных установках, подвергаются сильным ударам. В подвижных радиоустройствах условия питания ламп подвержены значительным изменениям. В то же время критерии допустимого срока службы ламп в специальных устройствах более жесткие, так как последствия выхода из строя ламп более тяжелые, чем для радиослушателя. В результате срок службы приемно-усилительных ламп в специальных устройствах намного короче, чем в радиовещательных приемниках. Для специальных устройств определить срок службы лампы в реальных условиях эксплуатации затруднительно, поэтому приходится пользоваться справочными данными о гарантийном сроке службы.

Во французской телефонной сети применяются лампы, гарантийный срок службы которых составляет от 5000 до 10 000 час. в зависимости от типа. Фактически средняя продолжительность работы подобных ламп составляет около 20 000 час.

Данные по некоторым лампам приведены в табл. 1.

Таблица 1

Обозначение типа	Тип лампы	Параметры		Срок службы, часы
		крутизна, *ма/в*	мощность *вт*	
PTT 202	Пентод усилительный	5,5	5,4	5000
PTT 203	Пентод выходной	8,5	7,2	4000
PTT 208	Пентод выходной	6	4	5000
PTT 202P	PTT 202-миниатюрный	5,5	1,5	8000
PTT 208P	PTT 208-миниатюрный	6	2	8000
PTT 213P	Пентод усилительный (миниатюрный)	8,5	1,9	8000

В настоящее время промышленность начинает осваивать особо надежные лампы. Некоторые лампы, предназначенные для авиации, подвергались испытаниям:

а) на удар: 20 ударов 500*g* в течение $0{,}75 \cdot 10^{-3}$ сек.;

б) на вибрацию: 2,5 *гц* 10*g* в течение 96 час.;

в) на периодическое включение: 2000 включений и выключений в течение 67 час. *В. А. Зимин*

5819. Электроника и надежность работы (Electronics and reliability), Radio and Telev. News, 1953, **49**, № 6, 8 (англ.)

Указывается, что проблема повышения надежности работы электронной аппаратуры имеет большое значение.

Если порча телевизора или выход из строя радиотрансляционной точки не влечет за собой сколько-нибудь серьезных последствий, то неуверенная работа радионавигационного оборудования бомбардировщика дальнего действия может повлечь за собой потерю самолета и многих человеческих жизней.

Отмечается, что пятнадцатичасовой полет 30 тяжелых бомбардировщиков требует 1 000 000 лампочасов работы.

Повышение надежности достигается: 1) упрощением схемы; 2) повышением надежности отдельных деталей (герметизация, улучшение изоляции, введение новых диэлектриков, повышение жесткости ламп, установка сопротивлений, рассчитанных на бо́льшую мощность рассеяния, и конденсаторов, рассчитанных

на бо́льшее рабочее напряжение); 3) профилактической проверкой аппаратуры; 4) употреблением кристаллических триодов; отмечается, что уже получены кристаллические триоды, работающие при температуре 100°, тетроды, генерирующие на частотах до 250 *Мгц*, и триоды, допускающие мощность рассеивания в 1 *вт* и более.

Л. В. Кутуков

5820. **Электронный счетчик. Хейман** (Elektronische Zähler. Heimann Reinhard), Nachrichtentechnik, 1953, **3**, № 9, 391—395 (нем.)

Обзорная статья по триггерным счетчикам. В популярной форме излагается принцип работы триггера как составной части счетчика; приводится схема с автоматическим смещением и с запуском в анод. Описывается работа и приводится схема двоичного счетчика, состоящего из 4 триггерных ячеек с обратными связями для пересчета на 10 (декады). Каждая декада имеет 10 неоновых ламп, служащих для указания каждого из 10 возможных состояний всех 4 ячеек. Описан действующий макет четырехдекадного счетчика, работающего до частоты 15 *кгц*, в котором в качестве триггерных ламп использованы двойные триоды типа 6Н8С.

Приведена таблица основных параметров различных двойных триодов, пригодных для применения в счетных импульсных устройствах. Даны библиографические ссылки, в том числе на описание схемы кольцевого счетчика и схем, позволяющих считать до 175 000 имп/сек. *В. К. Зейденберг*

5821. **Простой десятичный счетчик, использующий двоичные устройства. Слаттер** (A simple decimal counter using binary units. Slatter W. C. G.), Electronic Engng, 1953, **25**, № 307, 391—393 (англ.)

Излагаются общие соображения по представлению десятичной цифры специальным 4-разрядным двоичным кодом и приводится схема декады двоично-десятичного триггерного счетчика, работающего на частоте до 500 *кгц*. *Н. П. Трифонов*

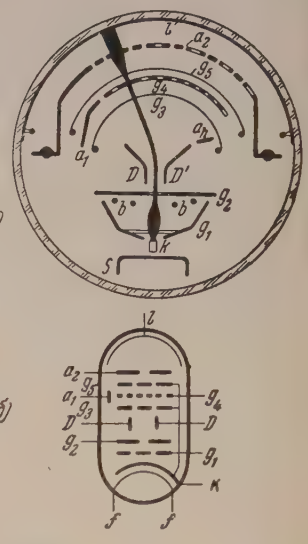
5822. **Подсчет посредством десятичных счетчиков. Сент-Андре** (Le comptage par tubes compteurs décimaux. Saint André R. de), Onde électr., 1953, **33**, № 316, 435—441 (франц.)

Проводится сравнительный анализ трубок с круглым электронным лучом и трубок с плоским электронным лучом. Для целей коммутации, в частности для счетчиков, плоский луч выгоднее круглого, так как требуется только свойство проводимости электронного луча, которое тем больше, чем больше видимое сечение луча.

При сравнении трубок с круглым и плоским лучами при решении одинаковых задач оказывается, что практически плотность электронного потока у плоского луча получается в 20 раз меньшей, чем у круглого луча. В связи с этим упрощается конструкция и отпадает необходимость иметь высокие ускоряющие напряжения. Для получения плоского электронного луча применяется цилиндрическая система электростатической линзы, образованная несколькими электродами.

В описываемой трубке Е1Т (фиг. 1) оптика образования луча включает один подогревный катод K, установленный перед экраном S, управляющую сетку g_1, которая придает лучу требуемую форму при помощи электродов b.

Для повышения скорости работы надо стремиться к увеличению силы тока электронного луча I. В трубке Е1Т величина I порядка 1 *ма* при напряжении 300 *в* (габариты трубки: диаметр 36 *мм*, высота 83 *мм*).



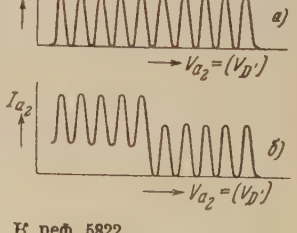
К реф. 5822

Фиг. 1

Электроды (схематично изображенные на фиг. 1) требуют точной расстановки только при одном размере, нормального направления в плане луча. Отклонение луча от своего начального крайнего правого положения (нулевая позиция) влево осуществляется положительными импульсами, подаваемыми на электрод левого отклонения. На каждом из 10 стабильных положений электронный луч прикасается к одному из отверстий в электроде g_4. Часть электронов пересекает также узкие разрезы анода a_2 и достигает слоя флюоресцирующего вещества, нанесенного на внутреннюю стенку баллона. По светящемуся следу луча на баллоне и по номерам позиций можно производить непосредственный отсчет. Когда луч проходит последнюю 9 позицию, он попадает на анод переброса в «0» a_1. Импульс с анода a_1 запускает мультивибратор, который вырабатывает сигнал для возвращения луча в нулевую позицию и импульс для передачи в следующий декадный счетчик.

Сетки g_3 и g_5, а также экраны соединены с катодом и служат для устранения действия вторичной эмиссии с g_4 и a_2. Вспомогательный анод a_h, который соединен с ускоряющим электродом g_2, служит для улавливания рассеявшихся электронов. Для избежания загрузки флюоресцирующего экрана электронами его покрывают проводящим слоем, соединенным с плюсом анодного напряжения.

На фиг. 2 даны характеристики $I_{a_2} = f(V_D, a_2)$ для трубки со щелями в электроде g_4 равной ширины. Описан принцип стабилизации положения луча сопротивлением R_{a_2} и процесс перебрасывания луча импульсами, поданными на электрод D.



К реф. 5822

Фиг. 2

Положение луча не чувствительно к изменениям анодного напряжения, когда луч достигает стабильной точки. При последовательном перемещении луча от «0» к «9» позиции напряжение на аноде a_2 и элек-

троде D' понижается вследствие повышения анодного тока благодаря возрастающей ширине щелей. Для возвращения луча в позицию «0» анодный ток закрывается по управляющей сетке на время, необходимое для заряда паразитной емкости анода до напряжения, соответствующего нулевой позиции. Это время и лимитирует скорость работы счетчика на этой трубке. Для трубки Е1Т скорость счета достигает 50 000 имп / сек.

Приведена фотография семидекадного счетчика в виде отдельного блока, размер которого 43 × 17,5 × × 15,5 *см*, вес 7,6 *кг*, потребление 77 *ва*.

В заключении сказано, что для увеличения скорости работы строятся трубки с использованием вторичной эмиссии, которые имеют ток анода до 30 *ма* и позволяют работать со скоростью до 10 *Мгц*.

В. Я. Алексеев

5823. **Счетчик с устройством для предварительного набора, предназначенный для измерения времени и других физических величин. Томасон** (A preset counter for time and quantity measurements. Thomason T. H.), Tele-Tech., 1953, **12**, № 8, 82—83, 210—212 (англ.)

Описание принципа действия и возможных применений счетчика «5426» фирмы «Беркли» (Berkeley, Scientific Division of Beckman Instruments). Максимальная скорость счета 40 тыс. имп / сек. Счетчик имеет 6 десятичных разрядов, каждый из которых является четырехразрядным двоичным счетчиком с обратной связью, оформленным в виде стандартного сменного блока. Счетчик снабжен устройством для набора шестизначного десятичного числа. После того как счетчик насчитает число импульсов, соответствующее набранному, счет прекращается, срабатывает специальное реле и, кроме того, с выхода счетчика можно снять сигнал в виде импульса; либо счет продолжается, но счетчик гасится каждый раз, когда насчитано нужное число импульсов.

В последнем случае счетчик можно использовать как делитель частоты с коэффициентом деления от 1 до 10^6. Счетчик можно использовать в упаковочных машинах для отсчета нужного числа деталей, для счета витков в намоточных машинах и т. п. с целью автоматизации подобных процессов.

Н. Я. Матюхин

5824. **Счетчик-измеритель интервалов времени** (Counter-timer), Radio and Telev. News., Radio-Electr. Engng Sec., 1953, **50**, № 2, 20 (англ.)

Сообщение фирмы «Беркли» (Berkeley, Scientific Division of Beckman Instruments, Inc.) о выпуске универсального прибора «5500» для измерения интервалов времени между двумя событиями, числа событий в заданный отрезок времени, периода низкочастотных колебаний. Прибор также может быть использован как обычный счетчик. Прибором можно измерить интервал времени от 40 *мксек* до 100 000 *сек*. с точностью ± 10 *мксек*. Счетчик прибора работает на частоте от 20 до 100 000 имп / сек.

Н. Я. Матюхин

5825. **Счетчик и измеритель интервалов времени** (Counter and timer), Tele-Tech, 1953, **12**, № 8, 106 (англ.)

См. реф. 5824.

5826. **Десятичный счетчик** (Decimal scaler), Radio and Telev. News, 1953, **50**, № 1, 22 (англ.)

Сообщение фирмы «Беркли» (Berkeley Scientific Division of Beckman Instruments Inc.) о выпуске десятичного счетчика «2105». Счетчик снабжен устройством для предварительной установки заданного числа импульсов и может быть подключен к внешнему регистру, печатающему устройству или вычислительной машине. Счетчик имеет 6 разрядов, из которых 4 механических.

См. РЖМат, 1954, 2779. *Н. Я. Матюхин*

5827. **Измеритель числа событий в единице времени — ЭПУТ** (EPUT meter), Electronics, 1953, **26**, № 4, 332—334 (англ.)

Сообщение фирмы «Беркли» (Berkeley Scientific Division of Beckman Instruments, Inc.) о выпуске прибора ЭПУТ 5558 (EPUT 5558) для подсчета количества событий, происшедших в заданный отрезок времени. Прибор состоит из электронного счетчика, работающего на частоте от 20 *гц* до 1 *Мгц*, шестиразрядного десятичного цифрового индикатора и устройства для точного задания интервала времени, в пределах которого ведется счет. *Н. Я. Матюхин*

5828. **Устройство для подсчета и печати количества импульсов** (Scaler-printer), Radio and Telev. News, 1953, **49**, № 1, 31 (англ.)

Сообщение фирмы «Норт Америкэн Филипс» (North American Philips Co., Inc.) о выпуске устройства для подсчета импульсов. Количество подсчитанных импульсов печатается в виде трехразрядного десятичного числа. При печати можно вводить масштабный множитель числа импульсов от 2 до 64. Прибор различает импульсы, отстоящие друг от друга на 5 *мксек*. Имеется визуальный индикатор, состоящий из трех рядов неоновых ламп, отмечающий количество подсчитанных импульсов в десятичной системе. Индикатор может включаться и без печатающего устройства. Прибор рассчитан для производства измерений в ядерной физике и для других целей. *Л. С. Легезо*

5829. **Десятичный счетчик** (Decade counting assembly), Nucleonics, 1953, **11**, № 4, 82 (англ.)

Сообщение фирмы «Диджитал Инструмент» (Digital Instrument Co., Inc.) о выпуске десятичного счетчика «100», который может быть использован в качестве делителя частоты, счетчика с индикатором и счетчика с предварительной установкой заданного числа импульсов. Счетчик работает на частоте до 100 *кгц*. *Н. Я. Матюхин*

5830. **Высокочастотный счетчик** (High speed counter), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, **41**, № 10, 56A (англ.)

Сообщение фирмы «Декейд Инструмент» (Decade Instrument Co.) о выпуске счетчика импульсов «Декавидер 100-1» (Decavider 100-1), работающего на частотах до 1 *Мгц* и предназначенного для использования в виде приставки к обычным счетчикам с предельной частотой до 100 *кгц* для расширения диапазона счета. Прибор имеет два выхода, с одного из которых снимается прямоугольный сигнал с частотой в 10 раз ниже входной, с другого — положительные либо отрицательные импульсы со временем нарастания 0,25 *мксек*. на 40 *в*. Входной сигнал должен быть не менее 100 *мв*. Размеры прибора 45 × 25 × 30 *см*; вес в упаковке около 15 *кг*. Приводится фотография. *Л. С. Легезо*

5831. Электронный счетчик, не требующий затраты времени на разогрев лампы (Electronic counter... requires no warm-up-time), Mach. Design, 1953, 25, № 5, 210 (англ.)

См. РЖМат, 1953, 952. Максимальная скорость счета 250 *гц*, счетчик имеет 10 десятичных разрядов. Потребление по мощности 75 *вт*. *Н. Я. Матюхин*

5832. Счетчик на лампах с холодным катодом (All-cold-cathode counter), Nucleonics, 1953, **11**, № 5, 85 (англ.)

Сообщение фирмы «Хейлди Электроникс» (Haleby Electronics Co.) о выпуске счетчика на лампах с холодным катодом. Срок службы таких ламп 10 лет. Счетчик имеет десять десятичных разрядов (РЖМат, 1954, 1882). Приведено фото.

Н. Я. Матюхин

5833. Электронный счетчик. Леви (Electronic counter. Levey Erwin), Radio and Telev. News, 1953, **50**, № 3, 43—45, 114 (англ.)

Популярное описание работы триггера и триггерного счетчика. Дана схема четырехразрядного счетчика на лампах 6SN7 и фотоснимки его конструктивного оформления в виде отдельного блока.

В. Я. Алексеев

5834. Новые двойные триоды фирмы «Дженерал электрик» для вычислительных машин (For high-speed computers... G. E.'s new twin triode!), Electronics. 1953, **26**, № 7, 19 (англ.)

Сообщение фирмы «Дженерал Электрик» о выпуске двойных триодов GL-5965 (РЖМат, 1954, 2765), предназначенных для работы в вычислительных машинах.

Лампа имеет большой срок службы (97% ламп GL-5844, которые являются старым вариантом лампы GL-5965, имеют срок службы более 10 тыс. час.), мощность рассеяния на каждом аноде 2,2 *вт*, а также специальную конструкцию катода, улучшающую работу лампы в триггерном режиме. *Н. Я. Матюхин*

5835. Продукция фирмы EAI (Write EAI..), Electronics, 1953, **26**, № 6A,157 (англ).

Сообщение фирмы «Электроник Ассошиэйтс» (Electronic Associates Inc.—EAI) о выпуске новых счетных приборов.

Универсальное моделирующее устройство для решения обыкновенных дифференциальных уравнений с усилителями постоянного тока с большим усилением, малым уходом напряжения на выходе, хорошей частотной характеристикой. Управление сосредоточено на пульте, где расположены панель для набора условий задачи, аттеньюаторы, потенциометры для задания начальных условий, ограничители.

Автоматический построитель кривых «Вариплоттер» (Variplotter) для представления одного изменяющегося постоянного напряжения в зависимости от другого. Модель 205G вычерчивает одну переменную x в зависимости от другой переменной y. Модель 205H вычерчивает одновременно две различные кривые. Статическая ошибка составляет 0,05% на полную шкалу. Динамическая ошибка в среднем составляет 0,05% от полной шкалы дополнительно к статической ошибке. Чувствительность около 20 *мв* на 1 *см*. Максимальная скорость записи около 20 *см* в 1 сек. Модель 205J имеет те же параметры, что и предыдущая, но поверхность, на которую наносится график, расположена вертикально. Ширина бумаги 75 *см*.

Преобразователь цифровых данных в непрерывные «Дидживертер» (Digi-Verter) типа 17-31A может преобразовывать цифровую информацию, полученную с перфокарт или перфоленты, в соответственно меняющиеся напряжения, пригодные для подачи на построитель кривых типа 205G или любой другой. Преобразователь 17-31A одновременно оперирует с двумя четырехзначными десятичными числами. Полный комплект преобразующего устройства состоит из преобразователя 17-31A, клавиатуры для входных данных и автоматического построителя кривых.

Два типа синус-косинусных потенциометров, модели 462 и 315 (последний сдвоенный). Точность обоих потенциометров 0,15% во всех точках окружности. Угловая разрешающая способность 0,005% от полного оборота. Электрическая разрешающая способность 0,05% от полного поданного напряжения. *Л. С. Легезо*

5836. Преобразователь непрерывных данных в цифровые (Analog-todigital converter), Nucleonics, 1953, **11**, № 6, 107—108 (англ.)

Сообщение фирмы «Джианнини» (G. M. Giannini and Co., Inc.) о преобразователе, который непрерывно показывает угол поворота вала в пределах 360° с точностью 0,1% без применения зубчатых передач. Максимальная скорость вращения 100 об / мин.

5837. Анализатор переходных процессов в магнитных усилителях. Гейгер (Magnetic amplifier transient analyzer. Geyger W. A.), Electronics, 1953, **26**, № 7, 189—191 (англ.)

Двухлучевой осциллограф, на экране которого в одинаковых масштабах времени одновременно наблюдаются формы входного (управляющего) сигнала и сигнала на выходе магнитного усилителя.

Приводится фото осциллограмм переходных процессов при воздействии на вход магнитного усилителя сигналов прямоугольной формы, получаемых с помощью эксцентрикового прерывателя, вращаемого мотором. Скорость вращения мотора 300 об/мин. Частота питания магнитного усилителя для приведенных осциллограмм 600 *гц*. Указывается, что для магнитных усилителей, работающих на частотах до 20 000 *гц*, механический переключатель нужно будет заменить электронным.

В. С. Бородин

5838. Физик из Американской радиокорпорации описывает новое быстродействующее электронное запоминающее устройство (RCA physicist describes new high-speed electronic memory device), Telecommuns Repts, 1953, **19**, № 46, 25 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 2754.

5839. Печатные схемы. Основные положения и применение методов, основанных на использовании фольги. Эйслер (Printed circuits: some general principles and applications of the foil technique. Eisler Paul), J. Brit. Instn Radio Engrs, 1953, **13**, № 11, 523—538, Points from the discussion and author's reply to the discussion, 538—541 (англ.)

Статья представляет собой доклад, сделанный автором на заседании Института инженеров-электриков (IEE) (Англия) 21 октября 1953 г.

Указывается, что в настоящее время имеется более двадцати различных способов печатания схем для электро- и радиоаппаратуры. Некоторые фирмы используют наиболее легкие, быстро организуемые в небольших масштабах, способы печатания, например, пульверизацию через трафарет, вжигание серебряных паст и т. д., которые в отдельных случаях могут оказаться выгодными.

Организация, специализирующаяся на выпуске печатной аппаратуры, должна выбрать метод, который был бы наиболее универсальным, пригодным к воспроизведению возможно более широкого круга радиодеталей и аппаратуры. В то же время этот метод должен иметь перед обычными способами монтажа преимущества более низкой стоимости или более высокого качества.

Вышеперечисленным требованиям лучше всего удовлетворяют способы, основанные на использовании фольги, нанесенной на изоляционной подложке с одной или с двух сторон. Рассмотрено несколько способов изготовления печатных схем на фольге (травление, выжигание, штамповка и др.).

Печатные схемы, основанные на использовании фольги, обладают следующими достоинствами.

Отношение поверхности проводника к его поперечному сечению при печатном монтаже получается гораздо большим, чем при монтаже обычным способом, что создает более благоприятные условия для рассеяния тепла. Можно поэтому значительно уменьшить сечение проводника и, следовательно, расход материала. Фольга дает наиболее плотный и наиболее однородный в механическом и электрическом отношении весьма стабильный слой, толщину которого можно выдержать с большой точностью. Удельная проводимость фольги равна удельной проводимости провода. Потери на вихревые токи, вследствие небольшой толщины слоя, малы. Посеребренная медная фольга может конкурировать с литцендратом. Гибкие печатные схемы позволяют создавать катушки с высоким Q.

Конструкции печатных контактов, термопар, различных сопротивлений, предохранителей и т. д. требуют употребления специальных сплавов или металлопокрытий. Способы печатания, основанные на использовании фольги, позволяют легко решить и эту задачу. Сопротивления, выполняющие функции обычных проволочных сопротивлений, могут быть легко получены при помощи фольги из соответствующего сплава высокого сопротивления.

Нанесение фольги не требует высокого качества поверхности изолятора. Практически фольга может быть нанесена на любой изолятор. Наиболее просто по сравнению с другими способами печатания производится соединение проводников посредством пайки или сварки. Вытравленный при изготовлении схемы металл можно вновь пустить в дело при помощи регенерации травящего раствора.

Библиография, 15 названий (в основном английские патенты). *Л. В. Кутуков*

5840. Машина для автоматического производства печатных сопротивлений высокой точности. Бейа (Automatic production machine for close-tolerance printed resistors. Bayha Jack), Tele-Tech, 1953, **12**, № 9, 78—80, 153—156, 158 (англ.)

Техника производства печатных сопротивлений большой точности еще недостаточно отработана. В электронной аппаратуре нередко употребляются сопротивления с допусками порядка $\pm 5\%$. Большая часть систем печати деталей не в состоянии обеспечить такую точность.

Употребляются различные методы доводки сопротивлений. При большинстве методов подгонка производится удалением части проводящего слоя путем шлифовки, выскабливания и т. д.; контроль осуществляется измерительными мостами. Все методы требуют предварительного отбора сопротивлений с тем, чтобы убедиться, что они пригодны для подгонки, последующей доводки и затем повторного контрольного замера. При большинстве этих методов неизбежна ручная работа на промежуточных операциях.

Описываемое в статье устройство «Отобрейдер» (Autobrader) разрабатывалось с целью возможно большей автоматизации всех этапов работы. При помощи устройства производится последовательная доводка сопротивлений. Каждый блок устройства доводит одно определенное сопротивление и передает плату следующему блоку, где обрабатывается следующее сопротивление и т. д. Может быть осуществлена последовательная работа любого числа блоков. Процесс доводки производится аппаратом типа пескоструйного, который удаляет часть проводящего слоя и этим увеличивает сопротивление. В качестве абразива употребляется окись алюминия. Если в процессе работы величина какого-либо сопротивления стала больше допустимой, изделие автоматически бракуется.

Каждый блок устройства может выполнять несколько операций, длительность отдельной операции зависит от качества сопротивлений, поставляемых печатной машиной. Плата с сопротивлениями, проходя через блок, проверяется и, если нужно, сопротивление подгоняется. Затем плата или передается дальше или бракуется. Все эти операции, исключая операцию доводки, занимают время порядка 1 сек. Доводка, если величина сопротивления составляет 60% от требуемого, занимает время, не превосходящее 8 сек.; для меньших отклонений от номинала это время уменьшается до 1—2 сек.

Число электронных ламп в установке сведено к минимуму — употребляются только лампы — регуляторы напряжения. Индикаторами мостов, контролирующих величину сопротивлений, служат реле. Применение электропневматической аппаратуры дало возможность значительно упростить конструкцию установки.

В статье приведены фотографии отдельных блоков машины, электрическая и пневматическая схемы, дано краткое описание работы блоков. *Л. В. Кутуков*

5841. «Эри» развивает новый метод производства печатных схем (Erie develops new production method for printed circuit), Radio and Telev. Weekly, 1953, **76**, № 11, 22 (англ.)

Сообщение фирмы «Эри Резистор» (Erie Resistor Corp.) о новом методе производства печатных схем. Желаемый рисунок монтажа вдавливается (чеканится) в покрытую медной фольгой поверхность пластины из бакелитовой пластмассы во время отвердения бакелита. После этого ненужная часть фольги механически удаляется. Преимуществом такого метода является отсутствие воздействия химических препаратов на изолирующий материал в процессе производства. *В. К. Зейденберг*

5842. **Печатные схемы фирмы «Эри»** (Erie electronic printed circuits), Electronics, 1953, **26**, № 7, 92 (англ.)

Сообщение фирмы «Эри Резистор» (Erie Resistor Corp.) о производстве печатных электронных схем, изготовляемых на керамике. *Л. В. Кутуков*

5843. **Экранировка ламп в печатных схемах** (Tube shielding for printed circuits), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, **41**, № 11, 45A (англ.)

Сообщение фирмы «Стейвер» (Staver Co.) об изготовлении экранов для миниатюрных ламп. Экраны предназначены для употребления в печатных схемах. Приведено фото. *Л. В. Кутуков*

5844. **Применение фольги для производства печатных схем** (Foil-clad laminates for printed circuits), Tele-Tech, 1953, **12**, № 6, 355 (англ.)

Сообщение фирмы «Синтейн» (Synthane Corp.) о производстве полуфабрикатов для печатных схем — пластмассовых листов размером 92 × 92 *мм* с наклеенной алюминиевой или медной фольгой толщиной 0,017—0,24 *мм*. Фольга может приклеиваться с одной или двух сторон. Материал выдерживает погружение в расплавленный припой, имеющий температуру 204—233°, в течение 10 сек.

Л. В. Кутуков

5845. **Пластины из смолы «эпокси» для печатных схем** (Epoxy-resin glass-cloth laminations for printed circuits), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, **41**, № 10, 142A (англ.)

Сообщение фирмы «Пластилайт» (Plastilight, Inc.) о выпуске нового материала для печатных схем «Эпоглас», пригодного для производства радиодеталей и для изготовления печатных схем. Выпускаются пластины, покрытые медной фольгой с одной или с двух сторон, для производства печатных схем методом травления (РЖМат, 1953, 1471; 1954, 3148), и без фольги — для клеммных панелей и для изготовления печатных схем электролитическим осаждением и штамповкой. Размер пластин 60 × 90 *мм* при толщине от 0,076 до 12,7 *мм* включительно. Смола эпокси хорошо связывается с медью при нагревании под давлением. Эпоглас не расслаивается, хорошо выдерживает пайку и хорошо обрабатывается. Основные качества материала: поглощение воды очень низкое (0,016%); диэлектрическая постоянная, поверхностное сопротивление и дуговое сопротивление высокие; рабочая температура 175°. *В. К. Зейденберг*

5846. **Сборка электронной аппаратуры без пайки при помощи ячеек. Селгин** (Solderless electronic assembly with cellular units. Selgin P. J.), Electr. Manufact., 1953, **52**, № 3, 139—142 (англ.)

Любую электронную схему, за небольшими исключениями, можно разбить на «ячейки», каждая из которых состоит не более чем из двух элементов и имеет три вывода. Такие «ячейки» выполняются в виде отдельных съемных узлов; наличие не более чем трех выводных контактов позволяет применить только одну прижимную пружину для каждой ячейки. В качестве пружины используется продолжение контакта ламповой панели, изготовленного из бериллиевой бронзы. Пружина одновременно осуществляет контакт с одним из выводов ячейки. Два других контакта прижимаются к печатной схеме соединений ячеек. Показана схема разбиения на ячейки цепей обычных усилителей промежуточной и низкой частоты.

Детали, помещенные в ячейки, герметизируются при помощи заливки смолой «эпокси» (см. реф. 5845). Размер ячеек 21 × 13 × 6 *мм*.

Описываемая конструкция позволяет производить быструю сборку печатных схем без помощи пайки, быструю замену неисправных деталей и может оказаться полезной при опытных разработках. Отсутствие пайки благоприятно влияет на состояние экспериментального шасси. При обычных методах сборки частое употребление паяльника быстро приводит шасси в негодность. Приведены фото и эскизы «ячеечной» конструкции электронных схем.

Л. В. Кутуков

5847. **«Ячеечная» конструкция электронной аппаратуры** («Cellular» electronic construction), J. Franklin Inst., 1953, **256**, № 3, 268—269 (англ.)

См. реф. 5846.

5848. **Блочные схемы** (Packaged circuits), Mach. Design, 1953, **25**, № 5, 118 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 2411.

5849. **Способы охлаждения аппаратуры дальней связи. Кой** (Heat dissipation from toll transmission equipment. Coy J. A.), Bell. Labs Rec., 1953, **31**, № 6, 225—230 (англ.)

Указывается, что современная тенденция к миниатюризации приводит к тому, что в единице объема размещается бо́льшее количество оборудования, в частности, выделяющего тепло. Поддержание температуры оборудования дальней связи в необходимых границах может быть достигнуто при помощи рационального размещения деталей и принудительной подачи охлажденного воздуха внутрь стоек и помещения.

Рассматривается рациональность различных методов охлаждения. Приводятся графики, указывающие тепловую энергию, выделяемую различными типами блоков аппаратуры дальней связи, и мощность, рассеиваемую единицей объема при различных температурах, фотографии и схемы вентиляционных устройств. *Л. В. Кутуков*

5850. **Магнитный материал с прямоугольной гистерезисной петлей** (Put this hysteresis loop to work for you!), Computers and Automation, 1953, **2**, № 3, 32 (англ.)

Сообщение фирмы «Олден Продуктс» (Alden Products Co.) о разработке железо-никелевого сплава с прямоугольной гистерезисной петлей. Из ленты такого сплава толщиной 0,025 *мм* изготовляются стандартные тороидальные сердечники для статических магнитных запоминающих устройств.

5851. **Ферроэлектрические материалы как запоминающие элементы цифровых счетных машин и переключающих устройств. Андерсон** (Ferro electric-materials as storage elements for digital computers and switching systems. Anderson J. R.), Proc. Assoc. Comput. Mach., Meeting at Toronto, Ont., 1952, September, 1953, 81 (англ.)

Краткое резюме доклада.

5852. Кристаллы с необыкновенной емкостью «памяти» для применения в телефонных коммутационных системах (Crystals, with unusual «memory» capacity, for use in telephone switching systems), Wire and Radio Commun., 1953, № 8, 23 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 3885.

5853. Запоминающее устройство, использующее титанат бария (Baruim titanate memory), Tele-Tech, 1953, **12**, № 8, 114 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 3885.

5854. Уровни энергии в электронике полупроводникового триода. Кобленз, Оуэнс (Los niveles de la energía en la electrónica del transistrón. Coblenz Abraham, Owens Harry L.), Rev. telegr. electron, 1953, **41**, № 491, 463—466 (исп.)

См. РЖМат, 1954, 4242.

5855. Выпуск двух типов полупроводниковых триодов (Transistors available in two types), Electronics, 1953, **26**, № 8, 302, 304 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 5331.

5856. Германиевый точечно-контактный триод (Il transistore a punto di contatto), Radio rivista, 1953, **6**, № 8, 304—305 (итал.)

Рассматриваются германиевые точечно-контактные триоды типов CBS-Hytron PT-2S и Philips OC 50, а также экспериментальный триод фирмы RCA. Приводятся характеристики.

5857. Полупроводниковые электронные приборы. Радиотехника без ламп — усилители с кристаллами-полупроводниками. Кобарг (Transistoren. Funktechnik ohne Röhren-Verstärker mit Halbleiterkristallen. Cobarg C. C.), Electro-Anzeiger, 1953, August, № 34—35, 312—314 (нем.)

Краткая статья о полупроводниковых электронных приборах; рассматриваются в общих чертах физические процессы, элементарные схемы и применения.

5858. Современное состояние развития полупроводниковых триодов. Мортон (Gegenwärtiger Stand der Transistorenentwicklung. Morton J. A.), Funk und Ton, 1953, **7**, № 9, 485—495 (нем.)

Первая часть перевода статьи «Present status of transistor developments», Morton J. A., Proc. Inst. Radio Engrs, 1952, **40**, № 11, 1314—1324.

5859. Достижения в области счетных и конторских машин (Efficiency in the office), Machinist, 1953, **97**, № 26, 1062—1063 (англ.)

Сообщение о промышленной выставке, состоявшейся в Англии летом 1953 г., на которой были представлены изделия 89 промышленных фирм.

Отмечается, что Англия по производству счетных и конторских машин занимает второе место после Америки: в 1952 г. выпуск в денежном выражении превысил 40 миллионов фунтов стерлингов, причем было экспортировано изделий на 14 миллионов фунтов стерлингов (перед войной выпуск составлял всего $2^1/_4$ миллиона фунтов стерлингов).

Среди счетных и вычислительных устройств на выставке было представлено электронное оборудование. Фирма «Бритиш Тэбьюлейтинг Машин» (British Tabulating Machine Co.) выставила машину для игры в крестики и нолики и для решения карточных задач. Та же фирма демонстрировала электронный множительный перфоратор, действующий на стандартных перфокартах и выполняющий денежные расчеты в английской монетной системе. Перфоратор может производить простое умножение или может быть приспособлен для выполнения вычислений вида $A \times B + C$. Максимальная скорость работы 6000 карт в час.

Разные варианты модели позволяют получать произведения сомножителей, каждый из которых имеет от 8 до 14 знаков.

Множительный перфоратор может быть снабжен устройством автоматического контроля, контролирующим вспомогательные пробивки на картах, само умножение и правильность пробивки произведения.

Английской фирмой «ИБМ Юнайтед Кингдом» (IBM United Kingdon Ltd.) была показана электронная счетная машина с управлением, программируемым картами.

Фирма «Берроус» (Burroughs Adding Machine Ltd.) демонстрировала механическую фактурную машину «Сенсиматик 300» (Sensimatic 300) для различных счетных работ.

На выставке были показаны новая вычислительная клавишная машина с ручным приводом «Мадас» (Madac), выпущенная фирмой «Мульдиво» (Muldivo Calculating Machine Co.), и новая автоматическая вычислительная машина «Фриден»(Friden),выпущенная фирмой«Булмерс» (Bulmers (Calculators), Ltd.), позволяющая, помимо выполнения всех обычных действий, производить автоматически извлечение квадратного корня.

В сообщении приведена фотография новой суммирующей машины «Самлок» (Sumlock) фирмы «Самлок» (Sumlock Ltd.), снабженной устройством для автоматического контроля.

Указывается также ряд конторских машин, представленных на выставке. *Н. Н. Парусникова*

5860. Применение коммутатора фирмы «Эриксон» в быстродействующем вычислительном перфораторе (LM Ericsson's crossbar switch in ultra-rapid calculating punch), Ericsson Rev., 1953, № 2, 61 (англ.)

Сообщение шведской фирмы «Эриксон» (LM Ericsson) об ее участии в разработке быстродействующего релейного множительного перфоратора фирмы «Паурс — Сеймас» (Powers-Samas Accounting Machines Ltd).

В перфораторе использовано стандартное телефонное оборудование фирмы «Эриксон»: реле, коммутаторы, оборудование автоматических телефонных станций. Скорость вычислений на перфораторе 10 тыс. операций в 1 час (включая время на перфорацию результатов). Предусмотрен автоматический контроль правильности выполнения операций. После проверки полученного результата на его карте пробивается специальная позиция контроля. *Н. Я. Матюхин*

5861. Изучение работы считывающих устройств и перфораторов АМА. Дуглас (Performance

studies of AMA readers and perforators. D o u g l a s s H. T.), Bell. Labs Rec.,1953, **31**, №3, 81—89 (англ.)

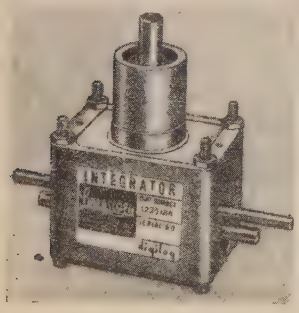
Перфораторы и считывающие устройства для разработанной в лаборатории фирмы «Белл» системы «АМА» выполняют 25 000 000 операций в год (перфорации) и 250 000 000 операций считывания. Эти устройства предназначены для нанесения отверстий на бумажную ленту шириной 75 *мм*. Перфоратор имеет 14 пробивных пуансонов, скорость пробивки достигает 20 ударов в 1 сек. В статье приводятся результаты исследования долговечности указанных устройств в работе и точности их изготовления.

Приведена электрическая схема испытательной рамы для этих устройств. *В. Н. Рязанкин*

5862. Изготовление деталей табулятора «Голлерит» (Making components for Hollerith tabulating machines), Machinery (London), 1953, **82**, № 2102, 375—381 (англ.)

Описание некоторых технологических операций, применяемых фирмой «Бритиш Тэбьюлейтинг Машин» на заводе в Летчуэрте. В статье дается описание изготовления следующих деталей табуляторов: 1) фрезерование храповых муфт счетчиков табулятора; 2) фрезерование пазов в гребенках табулятора; 3) обжимка латунных наконечников на проводах с помощью пневматического пресса; 4) краткое описание сборки цифровых колес и реле. *В. Н. Рязанкин*

5863. Интегратор с диском и шариком (Ball-disc integrator), Instruments, 1953, **26**, № 8, 1124 (англ.)



К реф. 5863

Объявление фирмы «Либраскоп» (Librascope, Inc.) о выпуске миниатюрного прецизионного интегрирующего механизма (см. фото). Указывается, что хорошая и длительная работа обеспечивается изготовлением диска из карбида вольфрама и суперфинишированием поверхности интегрирующих шариков. Размеры интегратора 4,8×7×8,2 *см*; вес 595 *г*.

5864. Интегратор (Integrator), Rev. Scient. Instrum., 1953, **24**, № 9, 889 (англ.)

См. реф. 5863.

5865. Эксперименты с функциональным арифмометром. Рамзайер (Erfahrungen mit der Funktionsrechenmaschine. R a m s a y e r K a r l), Z. Vermessungswesen, 1953, **78**, № 9, 308—312 (нем.)

Детально описаны эксперименты, имеющие целью установить эффективность сконструированного автором «функционального арифмометра» (РЖМат, 1954, 3523) по сравнению с обычным арифмометром, работа на котором связана с использованием печатной таблицы значений некоторой функции. Были поставлены 7 серий вычисления геодезических величин, получаемых по несложным формулам, как, например, угла направления по формуле $\operatorname{tg}\alpha = \Delta y / \Delta x$, расстояния по формуле $s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, приращений координат по формулам $s \cdot \cos\alpha$ и $s \cdot \sin\alpha$ и др.; сравнивалась надежность результатов, получаемых двумя способами при равных условиях, путем анализа и подсчета разного вида ошибок, в частности, выяснялось значение квалификации вычислителя. Общий вывод в пользу функционального арифмометра: его применение более чем вдвое снизило число ошибок.

В. М. Брадис

5866. Эксперименты с функциональным арифмометром. Рамзайер (Erfahrungen mit der Funktionsrechenmaschine. R a m s a y e r K a r l), Z. Vermessungswesen, 1953, **78**, № 10, 325—329 (нем.)

См. реф. 5865. Описаны и проанализированы эксперименты, которые выясняют выигрыш во времени, затрачиваемом на выполнение вычислений с помощью исследуемого функционального арифмометра, по сравнению с теми же вычислениями на обычном арифмометре при использовании обычных печатных таблиц. Этот выигрыш составил от 17% до 51%. В одном случае (при работе неопытных вычислителей) эксперимент дал вместо выигрыша проигрыш во времени в количестве 24%. Работа велась по таблицам тригонометрических функций с десятичным делением квадранта (Balzer, Dettwiler, Fünfstellige natürliche Werte der Sinus- und Tangentenfunktionen neuer Teilung für Maschinenrechnen, Verlag K. Wittwer, Stuttgart) и др.

В. М. Брадис

5867. Решение геодезических и топографических задач на счетных машинах-суперавтоматах. Б е н ч и н и (Risoluzione di problemi geodetici e topografici con le macchine calcolatrici superautomatiche. B e n c i n i P i e r o), Boll. geod. e sci. affini, 1953, **12**, № 1, 143—166, tabl. 1—12, mod. 612, 622 (1—19) 621 (1—4) (итал.)

Автор описывает способы решения следующих геодезических задач при помощи автоматической счетной машины Монро CAA-10 (Monroe CAA-10); 1) преобразование углов из одной системы делений в другую; 2) интерполяция значений тригонометрических функций, данных через 10″, в семизначных таблицах; 3) вычисление прямоугольных плоских координат точки по ее известным полярным координатам; 4) вычисление расстояния между точками по их прямоугольным плоским координатам; 5) вычисление приведений к центру; 6) вычисление сторон треугольника; 7) вычисление прямоугольных плоских координат точки, определенной прямой засечкой; 8) вычисление полигонометрии; 9) вычисление прямоугольных плоских координат точки, определенной обратной засечкой; 10) вычисление прямоугольных плоских координат двух точек в задаче Ганзена; 11) вычисление высоты точки, определяемой двусторонними наблюдениями зенитных расстояний; 12) изменение системы координат (перенос и поворот); 13) вычисления координат тригонометрических пунктов в проекции Гаусса (включая сюда вычисления редукций длин и направлений).

Дано краткое описание счетной машины Монро CAA-10, иллюстрированное фотоснимком. В прило-

жении к статье помещены многочисленные образцы вычислительных схем и формуляров. *В. Т. Наумова*

5868. **О вычислении комплексного сопротивления, эквивалентного параллельно соединенным комплексным сопротивлениям. Бёш** (Ein Beitrag zur Berechnung der Gesamtimpedanz von parallelgeschalteten Impedanzen. Boesch Walter), Frequenz, 1953, **7**, № 11, 331—335 (нем.)

Для вычисления комплексного сопротивления, эквивалентного параллельно соединенным комплексным сопротивлениям, предлагается применять либо обычные малые счетные машины, либо использовать графо-аналитический метод в сочетании с применением специальной счетной линейки.

В связи с этим сравниваются три способа вычисления комплексного эквивалентного сопротивления по количеству операций, производимых над комплексными числами.

Первые два способа предусматривают применение счетных машин и исходят один из проводимостей ветвей, другой из сопротивлений ветвей. Эти способы требуют соответственно 23 и 19 операций на счетной машине. По третьему способу эквивалентное комплексное сопротивление находится графо-аналитически с возможным применением специальной счетной линейки, что требует 11 операций. *Т. А. Татур*

5869. **Метод вычисления на ручных машинах многозначного частного при применении «метода построения» для деления. Голечек** (Ein Beitrag zum Maschinenrechnen: Die Berechnung vielstelliger Quotienten nach dem Aufbauverfahren. Holecek K.), Österr. Ingr-Arch., 1953, **7**, № 4, 331—336 (нем.; резюме англ., франц.)

Чтобы получить на ручной машине частное с бо́льшим количеством знаков, чем умещается на ней, можно перенести остаток от первого деления на несколько разрядов влево и продолжить деление. Дается вычислительная схема для получения частного с большим числом разрядов, если деление производится «методом построения», т. е. методом, состоящим в отыскании (без вычитания) наименьшего числа, при умножении на которое делитель дает произведение, превышающее делимое.

М. Л. Бродский

5870. **Конторское оборудование из Британии** (Office equipment from Britain), Ind. and Trade, 1953, **49**, № 7, 44—46 (англ.)

Краткий обзор, содержащий сведения о вычислительных машинах, изготовляемых различными английскими фирмами для денежных расчетов в валютах разных стран. *В. М. Брадис*

5871. **Счетная линейка со специальной шкалой для решения векторных прямоугольных треугольников. Нуччи** (Regolo calcolatore con scale speciali per la risoluzione dei trianogoli rettangoli di vettori. Nucci Piero), Elettrotecnica, 1953, **40**, № 6, 302 (итал.)

К обыкновенной счетной линейке добавляются две шкалы. Верхняя шкала разделена от середины направо — пропорционально $\lg(1+a^2)$, где $0<a<\sqrt{\frac{1}{2}}$, от средины налево — пропорционально $\lg(1-a^2)$. Нижняя шкала имеет в два раза большие деления — пропорционально $\lg\sqrt{1+a^2}$ и $\lg\sqrt{1-a^2}$. Кроме того, добавляется шкала для перехода от $\sin\alpha$ к $\cos\alpha$ и обратно.

Объясняются все случаи решения прямоугольных треугольников при помощи такой линейки. *В. А. Голубев*

5872. **Счетная линейка для степеней чисел или счетная линейка «loglog». Д'Эван** (Il regolo delle potenze o regolo «loglog». D'Evant Alessandro), Riv. meccanica, 1953, **4**, № 71, 17—22 (итал.)

Указывается, что для возвышения в степень и извлечения корня с любым целым или дробным показателем удобно пользоваться счетной линейкой с добавочными шкалами, представляющими графически логарифмы логарифмов чисел. Подробно излагается устройство и употребление такой линейки для вычислений.

Примечание референта. Ссылку на фиг. 11, которой в статье нет, следует заменить ссылкой на фиг. 10. *В. А. Голубев*

5873. **Специальная вычислительная линейка** (Computing device is graphical-numerical), Electronics, 1953, **26**, № 9, 329—330 (англ.)

Сообщение фирмы «Гербер» (Gerber Scientific Instrum.) о выпуске специальной вычислительной линейки «Граф-Аналог» (Graph Analogue) с восемнадцатью различными шкалами, включая логарифмическую, вероятностную, тригонометрические, степенную, линейную и шкалу обратных величине

Прибор предназначен главным образом для обработки осциллограмм (приведение масштабов, интерполяция, построение и обработка графиков с нелинейными шкалами и т. д.). *А. Б. Штыкан*

5874. **Счетный диск истопника и вычислительное устройство для подсчета топлива. Вебер** (Heizerrechenscheibe und Heizrechner. Weber H.), Energietechnik, 1953, **3**, № 10, 463—465 (нем.)

Описаны две номограммы с подвижными частями, оформленные в виде счетных дисков и предназначенные для расчета норм расхода топлива (бурого угля и брикетов из бурого угля) для систем центрального отопления.

Первая номограмма, именуемая «счетным диском истопника», дает часовой расход топлива. Вторая номограмма («вычислительное устройство для подсчета топлива») дает расход того же топлива в тоннах за Z суток при z часах работы системы в сутки в среднем. Отмечается выгода, доставляемая этими приборами для учета результатов соревнования по экономии топлива и для ведения личных счетов истопников. *Е. К. Нечаев*

5875. **Усовершенствованное счетное устройство для спектрографического анализа. Халловэлл** (Improved calculator for spectrographic analysis. Hallowell A. L.), Analyt. Chem., 1953, **25**, № 3, 528 (англ.)

5876. **Новая счетная линейка** (New slide rule), Welding J., 1953, **32**, № 10, 1008 (англ.)

Счетная линейка специального назначения для расчета веса полос, стержней, листов и плит из стали, никеля, алюминия, меди, титана и некоторых сплавов. *В. М. Брадис*

5877. Простой портативный счетчик в виде счетной линейки (Easy-to-use, portable computer in slide-rule form), Prod. Engng, 1953, **24**, № 8, 224 (англ.)

Прибор, имеющий лишь отдаленное сходство со счетной линейкой и предназначенный для облегчения выполнения некоторых операций с графиками: построения по точкам, чтение, интерполяция, умножение и деление. Основа — пружина, содержащая 100 калиброванных витков и закрепленная левым концом, в то время как правый конец соединен с ползунком, растягивающим ее. Размеры прибора 35,6×12,7×1,3 *см*. *В. М. Брадис*

5878. К изучению счетной линейки. Грейсер (On teaching of the slide rule. Craesser R. F.), School Sci. and Math., 1953, **53**, № 9, 707—709 (англ.)

5879. Использование цифровых вычислительных машин (Utilization of digital computing machines), Nature, 1953, **172**, № 4380, 648—651 (англ.)

Краткий отчет о проведенном Иженерной секцией Британской Ассоциации в Ливерпуле совещании об использовании цифровых машин в промышленности и технике.

Во вступительном слове проф. Вильямс (F. C. Williams) указал, что уже на современной, очень ранней стадии развития электронные вычислительные машины могут произвести революцию в проектировании сложных инженерных сооружении. У организаций, которым представлялась возможность проводить проектировочные расчеты на машине Манчестерского университета (РЖМат, 1953, 1437), потребность в ее использовании быстро возрастала. Полезное время этой машины составляет около 80%, смена задач производится за несколько секунд.

В докладе Ливсли (R. K. Livesley) были описаны общие принципы устройства цифровых машин и рассмотрены вопросы, связанные с программированием. Докладчик отмечает, что большие затраты на составление программы окупаются при ее массовом применении. Идеальная программа должна исходить от задания конструктору и выдавать окончательные результаты, охватывая все возможные варианты. Рациональное использование машин зависит полностью от программиста, причем в настоящее время больше ощущается недостаток программистов, чем машин.

В качестве примеров Ливсли привел четыре программы для машины Манчестерского университета, по которым проводились расчеты крутильных и поперечных колебаний валов, проектирование некоторых видов кулачков и расчет жестких стальных конструкций.

Доклад Олуэй (G. G. Alway) был посвящен применению машины AKE (РЖМат, 1954, 2416, 2752, 3096) для задач самолетостроения. За 18 месяцев накоплена значительная библиотека программ. Быстродействующее запоминающее устройство малой ёмкости удачно дополнено вспомогательным устройством с перфокартами, причем работа этого устройства может перекрываться во времени с вычислениями. Машина успешно применяется для численного решения задач линейной алгебры. В частности, при рассмотрении задачи о флаттере приходится находить значения двух параметров, обращающих в нуль определитель восьмого порядка, элементы которого являются комплексными рациональными функциями этих параметров. Эта работа выполняется за четверть минуты. *К. А. Семендяев*

5880. Поток автоматических вычислительных машин. Макдоналд (The flood of automatic computers. Macdonald Neil), Computers and Automation, 1953, 2, № 7, 7—9 (англ.)

В статье в популярной форме излагается современное состояние разработки вычислительных машин.

Сообщается, что к 1953 г. в США имелось свыше ста типов вычислительных машин (как цифровых машин, так и моделирующих устройств). За 10 лет США затратили на постройку этих машин примерно 500 миллионов долларов. *В. Д. Князев*

5881. Роботы наступают! Дейвид (The robots are coming! David Lester), Mechanix Illustr., 1953, **49**, № 8, 53—58 (англ.)

Популярная статья, написанная в сенсационном стиле буржуазной журналистики. В начале статьи описывается ряд возможных применений автоматики и телемеханики в быту и промышленности — швейная машина, вложив в которую материю и выкройку получаешь готовое платье, автоматически управляемая автомашина и т. п. После этого дается ряд примеров уже осуществленных автоматов, в том числе автоматический спектрометр, контролирующий плавку стали, электронные вычислительные машины и др., а также упоминаются уже построенные искусственные «животные» — черепахи Уолтера (Grey Walter), которые гоняются друг за другом и подходят к зарядной станции, когда имеющийся в них источник напряжения разряжается (РЖМат, 1954, 4950), слон Уенделкина (G. Wendelken, Англия), шагающий и двигающий ушами и хоботом, и мышь Шеннона (РЖМат, 1954, 2389).

Примечание референта. В приведенных в конце статьи названиях четырех цифровых вычислительных машин UNIVAC, BINAC, SEAC и ENI-AC автор неправильно расшифровывает буквы «AC» как «analog computer» — моделирующая вычислительная машина; для первых трех названий эти буквы обозначают «automatic computer» — автоматическая вычислительная машина, а название четвертой машины расшифровывается как Electronic Numerical Integrator and Computer — Электронная машина для численного интегрирования и вычисления. *К. А. Семендяев*

5882. Машина, которая разумнее того, кто ее сделал. Винер (A machine wiser than its maker. Wiener Norbert), Electronics, 1953, **26**, № 6, 368—374 (англ.)

Обсуждаются схемы машин Абши (Ashby W. R., Design for a Brain, John Wiley and Sons, New York, 1952). Рассматривается устойчивость таких машин (без выкладок). Обсуждение ведется в духе так называемой «кибернетики». *Г. Н. Поваров*

5883. Как говорить о вычислительных машинах. Флеш (How to talk about computers. Flesch Rudolf), Computers and Automation, 1953, 2, № 5, 17—18 (англ.)

Рассматривается вопрос о допустимости применения при популярном описании вычислительных машин антропоморфической терминологии («думающие машины», «электронный мозг» и т. п.).

Автор считает, что следует избегать говорить, что машина «думает», чтобы не вызывать неправильных представлений у неспециалистов.

К. А. Семендяев

5884. Люди о вычислительных машинах (Human brains on «brains»), Sci. News Letter, 1953, **64**, № 7, 101 (нем.)

См. РЖМат, 1954, 2754.

5885. Исправления (Correction), Proc. Inst Radio Engrs, 1954, **42**, № 2, 475

К РЖМат, 1954, 4613.

5886 РЕЦ. Кибернетика. Ред. **Фёрстер** (Cybernetics. Ed. Foerster Heinz von, 240 pp., Josiah Macy Jr Foundation, Caldwell, N. J., 1952, 4 doll.) [**Рецензия: Дарлингтон** (Darlington C. D., Endeavour, 1953, **12**, № 48, 220 (англ.)]

5887 П. Электронное счетное устройство. Фок (Electronic counting circuits. Faulk Donald P.) [Raytheon Manufacturing Co., Newton, Массачусетс, США]. Пат. США 2624842, кл. 250—27, 6.01.53

Электронный счетчик импульсов с накопительной емкостью, управляющей тиратроном. Накопительный конденсатор заряжается через диод импульсами, формируемыми из входных сигналов специальной тиратронной схемой. Конденсатор связан с сеткой выходного тиратрона, который в нормальном состоянии заперт из-за отрицательного смещения на его сетке.

При достижении на конденсаторе напряжения определенной величины выходной тиратрон зажигается и ток, проходящий через него, возбуждает цепь управления. Разряд коденсатора происходит после срабатывания цепи управления. *В. Н. Аверин*

5888 П. Счетчик импульсов. Холмарк (Pulse counter. Hallmark Clyde E.) [Farnsworth Research Corp.]. Пат. США 2641694, кл. 250—27, 9.06.53

Счетчик импульсов со ждущим блокинг-генератором, накопительной емкостью и зарядным диодом. *В. А. Зимин*

5889 П. Электронная счетная цепь. Холланд (Electronic counting circuit. Holland Ernest Oliver) [Pye Ltd., Кембридж, Англия]. Пат. США 2644886, кл. 250—27, 7.07.53

Триггерная схема на пентодах со связью анод—управляющая сетка, автосмещением и запуском через общее сопротивление в анодной цепи.

В. А. Зимин

5890 П. Инфракрасный построитель кривых. Джэксон, Форман (Infrared computing recorder. Jackson Warren, Jr, Foreman Robert W.) [Standard Oil Co., Cleveland, Огайо, США]. Пат. США 2634908, кл. 235—61, 14.04.53

Прибор для автоматического вычерчивания графиков, применяемый в вычислительных машинах и имеющий следящую систему в виде автобалансирующегося потенциометра с моторным приводом, управляемого фотоэлементом с оптической системой, работающим от инфракрасного излучателя.

Н. Я. Матюхин

5891 П. Схема сравнения для двоичных чисел. Вулард (Binary numbers comparator. Woolard Simon B.) [General Electric Co.]. Пат. США 2641696, кл. 250—27, 9.06.53

Схема сравнения, выдающая на выходе электрический сигнал в случае неравенства двух двоичных чисел и не выдающая сигнала в случае их равенства. Сравниваемые числа располагаются в двух триггерных регистрах. Состояния триггеров одинаковых разрядов регистров сравниваются при помощи дешифраторов на сопротивлениях; выходы всех дешифраторов смешиваются на выходной шине при помощи диодов. *В. Я. Алексеев*

5892 П. Статистическая машина (Statistical machine) [Powers-Samas Accounting Machines Ltd.]. Австрал. пат. 150125, кл. 56.2, 5.05.53

Машина представляет собой комбинацию сортирующего устройства, накапливающих счетчиков, ряда передаточных механизмов и контрольных приспособлений.

5893 П. Статистическая машина. Томас, Родс (Statistical machine. Thomas Arthur, Rhodes Frederick Sidney) [Powers-Samas Accounting Machines Limited, Лондон, Англия]. Пат. США 2633239, кл. 209—110, 31.03.53

Аппарат для приемки перфокарт, поступающих из статистической машины. В верхнюю часть приемника поступает перфокарта и удерживается в наклонном положении в течение определенного отрезка времени, перемещаясь в таком положении в надлежащее место. После перевода задерживающего приспособления в нерабочее положение карточка падает на другие, ранее поступившие в приемник. *Н. Д. Сазонова*

5894 П. Машина для перфорации записываемых данных и контроль записывающей машины при помощи указанной перфорационной записи. Уотсон, Бранд (Record punchiing machine and recording machine control by said punched record. Watson Thomas J., Brand Samuel) [International Business Machines Corp., Нью-Йорк, США]. Пат. США 2637398, кл. 164—112, 5.05.53

5895 П. Перфоратор. Малмрос, Барбер, Энгстром (Card punching machine. Malmros Gustav V. A., Barber Edmund A. Jr, Engstrom John R.) [International Business Machines Corp., Нью-Йорк, США]. Пат. США 2627924, кл. 164—113, 10.02.53

5896 П. Механизм для сортировки перфокарт (Mechanism for sensing record cards) [Powers-Samas Accounting Machines Ltd.]. Австрал. пат. 150172, кл. 56.2; 54.4, 5.03.53

5897 П. Подвижная коммутационная доска для счетных машин. Андерсон (Removable control plate for accounting machines. Anderson Walter A.) [Underwood Corp., Нью-Йорк, США]. Пат. США 2634051, кл. 235—60.5, 7.04.53

Конструкция коммутационной доски для счетных машин, имеющих несколько фиксированных настроек рабочих цепей. *Е. А.*

5898 П. Регистрационная карта с проводящими знаками. Воловиц (Record card with selective conductive marks. Wolowitz William H.). Пат. США 2634911, кл. 235—61.12, 14.04.53

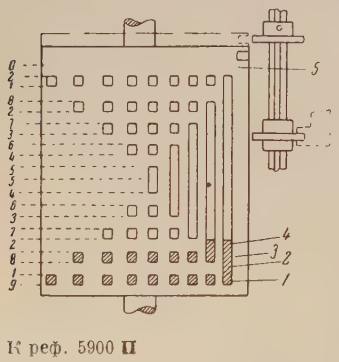
На регистрационную карту или лист наносится слой графита и поверх графита покрытие из изолирующего материала, которое может быть легко уничтожено в нужных местах для получения проводящего знака.

5899 П. Вычислительная машина. Лоренс, Херон (Calculating machine. Lawrence J. A., Heron K. M.). Австрал. пат. 149768, кл. 562, 12.02.53

Электромеханическая вычислительная машина для вычисления некоторой величины, зависящей от двух и более переменных, каждая из которых может иметь одно или несколько значений. Машина состоит из нескольких групп электрических реле. Каждая группа характеризует одну из переменных, а каждое реле в этой группе соответствует одному из возможных значений этой переменной. *Н. Д. Сазонова*

5900 П. Вычислительная машина. Райс (Calculating machine. Rice F. B.). Австрал. пат. 151564, кл. 56.2, 4.06.53

Машина со ступенчатым валиком, допускающая прямое вычитание без специальных реверсивных механизмов, которые обычно имеются в машинах этого типа. Вычитание производится без изменения вращения цифровых колес благодаря специфическому расположению зубцов на ступенчатом валике.



К реф. 5900 П

Вся рабочая (образующая) поверхность валика разлиновывается как бы на 19 строчек: девять парных строчек и одна единичная, соответствующая нулю. В каждой паре строчек записывается дважды одна и та же цифра, причем в первой строке эта цифра представляется прямым числом, а во второй строке та же цифра изображается ее дополнением до 10. Так, например, самая нижняя пара строчек *1* и *2* (см. фиг.) изображает цифру 9, причем строка *1* дает прямое представление этой цифры — в виде девяти зубцов, а строчка *2* дает представление этой цифры ее дополнением до 10 в виде одного зубца.

Аналогично вторая пара строчек *3* и *4* изображает цифру 8 и т. д. и, наконец, самая верхняя строка *5* изображает ноль — в этой строчке совсем нет зубцов. При помощи такого валика можно получать как прямое, так и дополнительное число, для этого надо иметь только простое устройство, обеспечивающее осевое перемещение барабана на величину одной строки (показано на фиг. пунктиром). Так как операция прямого вычитания равносильна операции сложения прямых чисел с числами, дополняющими вычитаемое единицы высшего разряда, то при помощи описываемого ступенчатого валика можно производить операцию вычитания методом дополнительных чисел, не изменяя направления движения цифровых колес машины.

Е. А. Александрова

5901 П. Автоматический скиповый табуляционный механизм для счетных машин. Хахт (Automatic skip-tab tabulating mechanism for accounting machines. Hacht William H. von) [Underwood Corp., Нью-Йорк, США]. Пат. США 2650758, кл. 235—60.42, 1.09.53

Механизм, последовательно передвигающий каретку счетно-пишущей машины в заранее определенные положения. Движения каретки (табуляционные и возвратные) производятся от специального привода. *Н. Н. Поснов*

5902 П. Механизм скипового перемещения вычислительной машины. Андерсон (Skip tabulating mechanism for accounting machines. Anderson Walter A.) [Underwood Corp., Нью-Йорк, США]. Пат. США 2647691, кл. 235—130, 4.08.53

5903 П. Механизм гашения для счетных машин. Белл (Zeroizing mechanism for computer machines. Bell Thomas Andrew) [Edwin Stanly Sutton, Gordon, near Sydney, New South Wales, Австралия]. Пат. США 2641411, кл. 235—144, 9.06.53

Механизм гашения может работать от руки и автоматически. В принципе механизм такого рода может производить не только гашение, но и взаимный переброс данных из одного счетчика в другой. Подобные устройства применяются в многосчетчиковых машинах различных систем.

Е. А. Александрова

5904 П. Механизм перемещения каретки. Хоторн (Carriage shifting mechanism. Hawthorne Nathaniel F.) [Friden Calculating Machine Co., Inc.]. Пат. США 2644639, кл. 235—63, 7.07.53

Схема механизма подобна используемым в вычислительных машинах КСМ, «РЕЙНМЕТАЛЛ» и др. *Е. А. Александрова*

5905 П. Оптическое суммирование в десятичной системе. Аллен, Кроми (Optical summation and decimal structure. Allen Philip H., Chromy Benjamin J.). Пат. США 2643822, кл. 235—63, 30.06.53

Устройство для автоматического указания при помощи светящейся точки положения запятой в счетных машинах с перемещающейся кареткой.

В. М. Брадис

5906 П. Управление перфоратором с клавиатуры пишущей машины. Джонсон (Composite keyboard. Johnson Reynold B.) [International Business Machines Corp., Нью-Йорк, США]. Пат. США 2641320, кл. 164—113,9.06.53

На клавиатуре обычной пишущей машины имеются 12 клавиш, выполняющих двойную функцию, а именно: помимо того что они служат обычными клавишами пишущей машины, они дистанционно связаны с клавиатурой перфоратора для пробивки карточек счетно-аналитической машины. При нажиме на какую-нибудь из этих 12 клавиш приводится в действие соответствующая клавиша перфоратора посредством дистанционной электрической связи между обеими клавиатурами.

Для того чтобы отличить эти клавиши от остальных, они обведены рамкой или выделяются каким-либо другим способом. Аналогично производится и управление клавиатурой алфавитного перфоратора. *А. Л. Леймер*

5907 П. Устройство для протяжки ленты. Смит (Tape handling device. Smith Edward M.) [Bell Telephone Laboratories, Inc., Нью-Йорк, США]. Пат. США 2636729, кл. 271—2.4, 28.04.53

Устройство для протяжки перфоленты с приводом от фрикционной муфты. Муфта включается устройством, контролирующим натяжение ленты.

5908 П. Круглая логарифмическая линейка. Сойер (Circular slide rule. Sawyer Herbert A., Jr). Пат. США 2634913, кл. 235—84, 14.04.53

Круглая счетная линейка состоит из пяти дисков, свободно вращающихся вокруг оси. Основная шкала нанесена на среднем диске, изготовленном из непрозрачного материала. С обеих сторон к нему примыкают два прозрачных промежуточных тонких диска, на которых также нанесена круговая логарифмическая шкала. Над промежуточными дисками расположены индикаторные диски из прозрачного материала, на которых нанесен ряд радиально расположенных рисок. Оба индикаторных диска, так же как и оба промежуточных диска, попарно скреплены для предотвращения их относительного вращения. *Н. Д. Сазонова*

5909 П. Прибор для расчета нелинейных усилителей. Левин (Computer for nonlinear amplifiers. Levine Daniel). Пат. США 2636674, кл. 235—61, 28.04. 53

Номограмма из кривых линий с подвижным линейным указателем. *В. М. Брадис*

5910 П. Средства и метод для механизированного построения номограмм. Лермер (Means and method for mechanically assembling nomographic charts. Lermer August S.). Пат. США 2635806, кл. 235—61, 21.04.53

Набор различных функциональных шкал и приспособление для их копирования в разных масштабах. *В. М. Брадис*

5911 П. Арифметическое устройство для пишущих инструментов. Уэйзер (Arithmetical device for writing instruments. Weiser Jack). Пат. США 2646220, кл. 235—87, 21.07.53

Миниатюрное вычислительное устройство для сложения и вычитания многозначных чисел, мон-

К реф. 5911 П

тируемое в автоматической ручке или карандаше без увеличения размеров инструмента (см. фото). *В. М. Брадис*

5912 П. Карманный счетчик. Сторбаккен (Pocket calculator. Storbakken Hilmer). Пат. США 2643824, кл. 235—89, 30.06.53

Вычислительное устройство для приближенного умножения чисел, состоящее из двух пластинок с рядами чисел, верхняя из которых прозрачна и может скользить по нижней. *В. М. Брадис*

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

5913. Устройство для вычисления параметров полета (Flight data computer), Aero Digest, 1953, 67, № 4, 128, 130 (англ.)

Сообщение американской фирмы «Колсман» (Kollsman Instrument Co.) о скоростной централи С-2, выдающей всем потребителям на самолете значения истинной воздушной скорости, числа Маха и статического давления.

Основой прибора является электромеханическое счетное устройство, вычисляющее приведенные выше данные по формулам, связывающим их с величинами скоростного напора, статического давления и температуры воздуха. Особенностью устройства является то, что температура не предполагается распределенной по высотам в соответствии со стандартной атмосферой, как это делается обычно, а непосредственно измеряется.

В счетно-решающем устройстве используются 3 серводвигателя для силовой отработки показаний чувствительных элементов — манометрических коробок, измеряющих скоростной напор, статическое давление и давление в жидкостном термоэлементе, и вращающиеся трансформаторы (автосины), служащие для передачи показаний потребителям. *Г. О. Фридлендер*

5914 РЕЦ. Анализ следящих систем. Тейлер, Браун (Servomechanism analysis. Thaler George J., Brown Robert G., XII+ +414 pp., McGraw-Hill Publishing Co. Ltd., London, 1953, 64 s.) [**Рецензии: Уэстготт** (Westcott J. H.), Brit. J. Appl. Phys., 1953, **4**, № 10, 318; **Лейтон** (Layton J. M.), Electronic Engng, 1953, 25, № 308, 437 (англ.)]

5915 П. Декодирующее устройство с линией задержки. Глёсс, Либуа (Delay line decoder. Gloess Paul François Marie, Libois Louis Joseph). Пат. США 12641 698, кл. 250—27, 9.06.53

Устройство служит для перевода данных, представленных сигналом с импульсно-кодовой модуляцией (и.-к. м. сигнал), в импульсы, модулированные по амплитуде. Импульсы и.-к. м. сигнала

стандартной амплитуды подаются на линию задержки со временем задержки, равным длительности одной кодовой группы импульсов.

Для предотвращения отражения от концов линии задержки на последних поставлены сопротивления. Линия задержки имеет несколько отводов в соответствии с количеством разрядов в группе, расположенных по длине ее таким образом, что время задержки каждой секции равно интервалу времени между соседними импульсами группы.

С отводов линии задержки импульсы кода группы одновременно подаются через суммирующие сопротивления на сетку выходного вентиля. На другую сетку вентиля подаются от отдельного генератора синхронизирующие импульсы, и на выходе вентиля появляется импульс, величина которого будет соответствовать данному коду. *В. Н. Аверин*

5916 П. **Электронное счетное устройство. Кемп** (Electronic counter. Camp James B.) [United States Steel Corp., США]. Пат. США 2635809, кл. 235—92, 21.04.53

Тиратронный счетчик для подсчета движущихся предметов. *В. С. Бородин*

5917 П. **Быстрая счетная схема. Джейкобсон** (Fast counting circuit. Jakobson Mark J.) [United States Atomic Energy Commission, США]. Пат. США 2636993, кл. 250—71, 28.04.53

Блок-схема устройства для подсчета частиц, излучаемых каким-либо радиоактивным элементом, снабженная схемой совпадения и счетчиком для подсчета частиц, зарегистрированных двумя индикаторами. *П. П. Головистиков*

5918 П. **Устройство для перевода телеграфного кода. Элайасен, Енсен** (Telegraphic code translator. Eliasen Ernst Aksel Borge, Jensen Kaj Herman Frederik). Пат. США 2643292, кл. 178—26, 23.06.53

Машина для перевода телеграфного кода Уитстона в пятипозиционный телеграфный код. *Н. Ф. Семикова*

5919 П. **Вычислительное устройство в системе, автоматически составляющей счета. Риталлак** (Computing circuits for automatic billing systems. Retallack John B.) [Bell Telephone Laboratories, Inc., Нью-Йорк, США]. Пат. США 2634910, кл. 235—61.8, 14.04.53

Устройство для автоматического суммирования платы за телефонные вызовы, печатающее результаты в виде счетов абонентам. *В. С. Бородин*

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Абрамовиц 5600
Авдеев Н. Я. 5632
Агарвал 5646
Айзакс 5649
Александер 5440
Александров А. Д. 5778
Алексич 5405
Аллен 5905 **П**
Ангар 5774
Андерсон 5851
Андерсон 5897 **П**, 5902 **П**
Андресс 5741
Апери 5633
Араньоль 5789
Арведсон 5674
Арци 5773
Асколи 5567
Асорин 5679

Б

Багчи 5737
Баджемил 5487
Бакленд 5700 **РЕЦ**
Бандьопадхьяй 5585
Банерджи 5394 **К**
Барбер 5895 **П**
Барбэлат 5446
Барнард 5692
Баули 5700 **РЕЦ**
Бейа 5840
Бейкер 5467
Белецкий 5374
Белинский П. П. 5555 **Д**
Белл 5400 **К**
Белл 5719 **РЕЦ**
Белл 5903 **П**
Бенчини 5867
Берг 5532
Бергстрём 5669
Берджер 5786
Берж 5709
Березанский Ю. М. 5659
Березина Л. Я. 5758
Берр 5718 **К**
Берс 5578
Бец 5540
Бёш 5868
Бирман 5811
Блан — Лапьер 5676 **К**
Бланч 5802 **РЕЦ**
Блашке 5772
Блейк 5802 **РЕЦ**
Блэккетт 5475
Блэкуэлл 5710 **К**
Болотин В. В. 5586, 5587
Бомстра 5730
Бонончини 5499
Боркум М. И. 5793
Борш 5797
Бранд 5894 **П**
Браун 5805
Браун 5914 **РЕЦ**
Брауэр 5451
Бремекамп 5574
Брун 5403
Булешев У. Б. 5769 **Д**
Буль 5431 **РЕЦ**
Буцериус 5599

В

Вагнер 5780
Вальфиш А. З. 5433
Ван - дер - Варден 5681, 5682
Ван - дер - Поль 5641
Ван Ши - цян 5477
Ванек 5604, 5605
Варга 5407
Варт 5683
Ватанабе 5511
Вебер 5874
Веверка 5570
Вегнер 5449, 5781
Вейнгарден 5531
Вильсон 5544
Вильямс 5688
Винер 5882
Виноградская 5768
Виртанен 5548
Владзиевский А. П. 5713
Воделанн 5454
Волибнер 5520
Воловиц 5898 **П**
Вольпато 5576
Вон 5491
Вулард 5891 **П**
Вычихло Ф. 5415
Вьола 5523

Г

Гагуа М. Е. 5788
Галимов К. З. 5739, 5757
Гальярдо 5566
Гамбье 5754
Ган Цзи - лун 5597
Ганден 5818
Ганс 5723
Гастин 5763
Гейгер 5837
Герарделли 5596
Германский 5627
Герретсен 5729
Гершик 5707 **РЕЦ**, 5710 **К**
Гильберт 5620 **К**
Гинсберг 5506
Гихман И. И. 5670
Гландсдорф 5653
Глёсс 5915 **П**
Глисон 5673
Голдман 5717 **К**
Голдстейн 5666
Голечек 5869
Гордевский Д. З. 5750 **К**
Готье 5565
Грант 5690
Грей 5606
Грейссер 5878
Гринвуд 5673
Гросман 5508
Гротендик 5663
Грюсс 5634 **К**
Гу 5562
Губенко Т. П. 5793
Гудстейн 5423, 5515 **РЕЦ**
Гумовский 5639
Гупта 5436

Д

Данжуа 5496
Дани 5708
Дарбо 5624
Дарлингтон 5886 **РЕЦ**
Дейвид 5881
Деланж 5543
Денеш 5439
Денисюк 5643
Денисюк І. М. 5643
Де - Словере 5625
Дешевой Г. М. 5746
Джамбунатхан 5702 **РЕЦ**
Джваршейшвили А. Г. 5516
Джейкобсон 5917 **П**
Джонсон 5906 **П**
Джэксон 5890 **П**
Дибнер 5420 **РЕЦ**
Диксон 5687
Дицман А. П. 5464
Длоугий 5513
Досс 5524
Дуайр 5785
Дугласс 5861
Д'Эван 5872
Дюран 5612
Дью - Бридж 5390

Е

Енсен 59181 **П**

Ж

Жак И. Е. 5517
Жерло 5411
Житников К. А. 5747

З

Закшевский 5792
Замельсон 5489
Заранкевич 5485
Заремба 5602
Зелинка Р. 5415
Зол 5652 **РЕЦ**
Зуховицкий 5389
Зуховицький С. І. 5389

И

Идзуми 5518, 5519
Инагаки 5484
Инцингер 5720
Итон 5809

Й

Йейтс 5629
Йоунссон 5476
Йоханссон 5428 **К**

К

Кабанова К. И. 5799 **Д**

Казотти 5408
Кайдаш Н. М. 5529 Д
Калаби 5493
Калиго 5564
Каменков Г. В. 5571
Каметани 5498
Камке 5812
Кантор 5515 **РЕЦ**
Карпелевич Ф. И. 5761
Картеси 5419 **РЕЦ**
Кассина 5492
Каттеридж 5595
Кауфман 5575, 5657
Кахан 5631
Каччопполи 5500
Кек 5796
Келлер 5607
Кемп 5916 **П**
Кандалл 5698 **К**
Кенуй 5703 **РЕЦ**, 5704 **РЕЦ**
Кервер 5490
Кестин 5602
Кильчевский Н. А. 5740 **К**
Киносита 5483
Китакава 5677 **РЕЦ**
Кларк 5396 **К**
Клейн 5397 **К**
Клин 5430 **РЕЦ**
Кобарг 5857
Кобаяси 5764
Кобленз 5854
Кобальд 5854
Кобольд 5736
Кой 5849
Кокс 5704 **РЕЦ**
Кокстер 5733
Коломбо 5601
Коломбо 5655
Комацу 5577
Комб 5535
Коммерелль 5734 **К**, 5735 **К**
Кон 5470
Коннор 5695, 5696
Конторович М. И. 5651 **К**
Коржинек 5372
Кородинас 5528
Костовский А. Н. 5503
Коулсон 5798 **К**
Коэн 5685
Кралик 5497
Крейвен 5719 **РЕЦ**
Крыжановский 5598
Крижановський О. М. 5598
Криккеберг 5501
Кроми 5905 **П**
Крулль 5457
Круминг А. А. 5573
Куликов К. И. 5748
Куперман 5584
Купревич В. Ф. 5369
Куратовский 5371, 5485
Кушваха 5590
Кханна 5545
Кшижанский 5616 **К**
Кэрнс 5391

Л

Лабазин В. Г. 5547
Лаврентьев М. М. 5784
Лам 5706 **РЕЦ**
Лампарьелло 5615
Ланкфорд 5396 **К**
Лебедев А. А. 5572
Леви 5833
Леви 5617 **РЕЦ**
Леви 5672
Левин 5909 **П**
Левин В. И. 5393 **К**
Лейтон 5914 **РЕЦ**
Лемуан 5759
Ленуар 5767
Леонов М. Я. 5591
Лепаж 5776
Лермер 5910 **П**
Либуа 5915 **П**
Лившиц М. С. 5660
Лидский В. Б. 5667 **Д**
Лоренс 5899 **П**
Лостер 5551
Лось 5512
Лукасевич 5429 **К**
Лукач 5668
Лукомская А. М. 5417 **К**

М

Мавродин 5726
Магнус 5560
Мадоу 5701 **РЕЦ**, 5702 **РЕЦ**
Майер - Калькшмидт 5542
Майкл 5481
Макдоналд 5880
Мак - Карти 5626
Малер 5470
Малмрос 5895 **П**
Малышев А. В. 5438
Мальцев А. И. 5463
Манара 5727
Манд 5622
Манн 5675 **К**
Марков А. 5430 **РЕЦ**
Маулер 5474
Мей 5724
Мейер - Эплер 5714
Мейнардус 5432
Метелиц М. З. 5751 **Д**
Милнор 5777
Минкевич 5791
Минорский 5592
Модона 5568
Мор 5533
Моран 5689
Мордухай - Болотовской Д. 57. 6
Моригути 5677 **РЕЦ**
Мориц 5656
Моро 5762
Морони 5707 **РЕЦ**
Мортон 5858
Мостовский 5371, 5442 **К**
Мюллер 5738

Н

Нагао 5460
Наденик 5375
Наир 5694
Накаяма 5460
Насыров Р. М. 5539
Немыцкий В. В. 5658
Нёйман 5465
Николау 5614
Новак Й. 5415, 5480
Ногути 5482
Нозик 5817
Норден А. П. 5749 **К**
Норкин С. 5743
Норткотт 5471
Нуччи 5871
Ньюман 5706 **РЕЦ**

О

Олевский М. Н. 5581
Островский 5783
Оттер 5708
Оуэнс 5854

П

Пайпс 5559
Палама 5642
Пановко Я. Г. 5589
Пани 5479
Пароди 5445
Пейеримхофф 5637
Перселл 5787
Петерс 5804 **РЕЦ**
Пёшль 5561
Пивоваров А. А. 5609
Пини 5619
Пинскер И. Ш. 5526
Планс 5486
Плоткин Б. И. 5458
Погребисский 5389
Погребисський И. Б. 5389
Подстригач 5603
Подстригач Я. С. 5603
Поледна 5654
Положий Г. Н. 5554
Полубаринова - Кочина П. Я. 5611
Потапов В. С. 5410
Потс 5678
Поццоло-Феррарис 5732
Прахар 5376
Предонзан 5790
Прейс 5805
Прокофьев А. Н. 5461

Р

Рademахер 5502
Райс 5900 **П**
Рамзайер 5865, 5866
Рейдемейстер 5494 **К**
Рив 5392
Риге 5455
Риталлак 5919 **П**
Рихерт 5435
Роберсон 5563
Рогаченко В. Ф. 5744
Родс 5893 **П**
Родстрём 5550
Роз 5425
Розен 5549
Романовский В. И. 5716
Рубин С. 5816
Рудин 5541

С

Саарнио 5514 **К**
Савинов Г. В. 5588
Садлер 5741
Сакураи 5608
Сандон 5706 **РЕЦ**
Сандрум 5680
Санелевич 5441
Сас 5745
Сегре 5752
Седлачек 5401 **РЕЦ**
Седмак 5775
Сейбл 5786
Селгин 5846
Селфридж 5527
Сент-Андре 5822
Сигал 5665
Сидлер 5731
Сикорский 5664
Симпкин 5810
Сколем 5422
Скопин А. И. 5469
Скугоров В. Н. 5623
Слаттер 5821
Слебодзинский 5765
Смарт 5427
Смирнов Д. М. 5459
Смирнов Ю. М. 5478
Смит 5907 **П**
Смит 5800
Сойер 5908 **П**
Сойер 5741
Соколов Г. Т. 5582, 5583
Спигел 5630, 5636
Старк 5442 **К**
Стернберг 5575, 5657
Стечкин 5525
Стока 5725
Сторбаккен 5912 **П**
Страшевич 5505
Стрельцов В. В. 5778
Стэнли 5803 **РЕЦ**
Суноути 5521, 5640
Суньер-и-Балагер 5528, 5546
Суэйн 5722

Т

Такач 5650
Тарджеманов Дж. А. 5418 **К**
Тартаковский В. А. 5448
Татибана 5760
Тевзадзе Г. Н. 5770 **Д**
Тейлер 5914 **РЕЦ**
Тёплиц 5621 **К**
Терстон 5440,5753
Тимм 5552
Токер 5705 **РЕЦ**
Тольятти 5413
Томас 5893 **П**
Томасон 5823

Тоскано 5644
Тот 5406
Трантер 5652 **РЕЦ**
Тревизан 5466
Трикоми 5645
Трусделл 5409

У

Уайлер 5742
Уайтхед 5488
Уилкс 5803 **РЕЦ**
Уинклер 5817
Уисдом 5404
Унгер 5755
Уо 5705 **РЕЦ**
Уо 5785
Уолш 5537, 5538, 5779
Уотсон 5894 **П**
Уэйзер 5911 **П**
Уэйнберг 5447
Уэйсс 5697
Уэсткотт 5914 **РЕЦ**

Ф

Фантапье 5662
Фереди 5703 **РЕЦ**
Ферретти 5728
Ферстенберг 5628
Фёрстер 5886 **РЕЦ**
Фетвейс 5402
Фетт 5597
Финни 5699 **К**
Фишер 5794
Флетчер 5803 **РЕЦ**
Флеш 5883
Фогель 5569
Фок 5887 **П**
Фор 5613
Форман 5890 **П**
Форте 5676 **К**
Франк Л. 5412
Фын 5712

Х

Хажинский 5536
Халловелл 5875
Хамакер 5691
Хаммер 5701 **РЕЦ**
Хампель 5373
Ханани 5530
Хант 5671
Хара 5638
Хаусен 5701 **РЕЦ**
Хаутхаккер 5805
Хахт 5901 **П**
Хейман 5820
Хеллер 5570
Хеллингер 5621 **К**
Хенкин 5426
Херон 5899 **П**
Херстейн 5452
Херуиц 5701 **РЕЦ**
Хесс 5431 **РЕЦ**
Хилле 5534
Хилтон 5488, 5495 **К**
Хирениус 5684
Хогбен 5398 **К**
Холдейн 5686
Холл 5695
Холланд 5889 **П**
Холмарк 5888 **П**
Хомороди 5813
Хопф 5579, 5580
Хоторн 5904 **П**
Хоэйзель 5507
Ху Хэ-шен 5766
Хуа Ло-гэн 5472
Хунцикер 5795

Ц

Цутикура 5522

Ч

Чеккони 5504
Черский Ю.И. 5618
Чистяков Ю. В. 5556

Ш

Шази 5617 **РЕЦ**
Шафаревич И. Р. 5468
Шах 5545
Швабхёйзер 5424
Швенкхаген 5648
Шентон 5647
Шеффе 5693
Шёнеберг 5437
Шик 5456
Ширшов А. И. 5473
Шмидт 5635 **К**
Шмидт 5507
Штанге 5715
Штейнхаузер 5804 **РЕЦ**
Штейнхаус 5401 **РЕЦ**
Штоль 5553
Штраус А. В. 5661
Штрёле 5593, 5594
Шуберт 5399 **К**
Шютте 5421

Щ

Щегольков Е. А. 5510

Э

Эванс 5465
Эглстон 5771
Эйслер 5839
Эйткен 5450
Эйхенбергер 5610
Экман 5462
Элайасен 5918 **П**
Элленбергер 5806
Эмбер 5414
Эмерсон 5711
Энгстром 5895 **П**
Эрдеш 5558, 5671
Эресман 5721
Эррера 5509

Ю

Юден 5696
Юэ Минь—и 5434

Я

Якобшталь 5453
Яковкин М. В. 5443, 5444
Янг 5779, 5782
Янкович 5557

A

Abramowitz M. 5600
Agarwal R. P. 5646
Aitken A. C. 5450
Alexander M. K. 5440
Alexits G. 5405
Allen Ph. H. 5905 **П**
Anderson J. R. 5851
Anderson W. A. 5897 **П**, 5902 **П**
Andress W. R. 5741
Apéry R. 5633
Aragnol A. 5789
Arfwedson G. 5674
Artzy R. 5773
Ascoli G. 5567
Azorín F. 5679

B

Bagchi H. D. 5737
Bagemihl F. 5487
Baker G. A. 5467
Bandyopadhyay G. 5585
Banerji A. C. 5394 **К**
Barbàlat I. 5446
Barber E. A. Jr. 5895 **П**
Barnard G. A. 5692
Bayha J. 5840
Bell D. A. 5719 **РЕЦ**
Bell E. T. 5400 **К**
Bell Th. A. 5903 **П**
Bencini P. 5867
Berg L. 5532
Berge C. 5709
Berger W. J. 5786
Bergström H. 5669
Bers L. 5578
Betz A. 5540
Bielecki A. 5374
Biermann L. 5811
Blackett D. W. 5475
Blackwell D. 5710 **К**
Blanc-Lapierre A. 5676 **К**
Blanch G. 5802 **РЕЦ**
Blaschke W. 5772
Bleick W. E. 5802 **РЕЦ**
Boesch W. 5868
Bononcini V. E. 5499
Boole G. 5431 **РЕЦ**
Boomstra W. 5730
Borş C. 5797
Bowley A. 5700 **РЕЦ**
Brand S. 5894 **П**
Brauer A. 5451
Bremekamp H. 5574
Brown J. A. C. 5805
Brown R. G. 5914 **РЕЦ**
Brun V. 5403
Bucerius H. 5599
Buckland W. R. 5700 **РЕЦ**
Burr I. W. 5718 **К**

C

Caccioppoli R. 5500
Cairns S. S. 5391
Calabi L. 5493
Caligo D. 5564
Camp J. B. 5916 **П**
Cantor G. 5515 **РЕЦ**
Casotti M. W. 5408
Cassina U. 5492
Cecconi J. 5504
Charzynski Z. 5536
Chazy J. 5617 **РЕЦ**
Chromy B. J. 5905 **П**
Clark J. R. 5396 **К**
Cobarg C. C. 5897
Coblenz A. 5854
Cohen A. C. Jr. 5685
Cohn P. 5470
Colombo G. 5601
Colombo S. 5655
Combes J. 5535
Connor W. S. 5695, 5696
Cooperman Ph. 5584
Corominas E. 5528
Coulson C. A. 5798 **К**
Cox D. R. 5704 **РЕЦ**
Coxeter H. S. M. 5733
Coy J. A. 5849
Craven T. L. 5719 **РЕЦ**
Cutteridge O. P. D. 5595

D

Darbo G. 5624
Darlington C. D. 5886 **РЕЦ**
David L. 5881
Delange H. 5543
Denes P. 5439
Denjoy A. 5496
D'Evant A. 5872
De Sloovere H. 5625
Dibner B. 5420 **РЕЦ**
Dixon W. J. 5687
Dlouhý Z. 5513
Doss R. 5524
Douglass H. T. 5861
DuBridge L. A. 5390
Dunne J. 5708
Durand E. 5612
Dwyer P. S. 5785

E

Eaton J. R. 5809
Eckmann B. 5462
Eggleston H. G. 5771
Ehresmann C. 5721
Eichenberger H. P. 5610

Eisler F. 5839
Eliasen E. A. B. 5918 II
Ellenberger 5806
Emerson R. C. 5711
Engstrom J. R. 5895 II
Erdös P. 5558, 5671
Errera A. 5509
Evans T. 5465

F

Fantappiè L. 5662
Faulk D. P. 5887 II
Faure R. 5613
Fereday F. 5703 РЕЦ
Ferretti P. 5728
Fett G. 5597
Fettweis E. 5402
Finney D. J. 5699 К
Fischer J. 5794
Flesch R. 5883
Fletcher A. 5803 РЕЦ
Foerster H. v. 5886 РЕЦ
Foreman R. W. 5890 II
Fortet R. 5676 К
Fung Y. C. 5712
Furstenberg H. 5628

G

Gagliardo E. 5566
Gambier B. 5754
Gandin M. P. 5818
Gans D. 5723
Gauthier L. 5565
Gerlo A. 5411
Germansky B. 5627
Gerretsen J. C. H. 5729
Geyger W. A. 5837
Gherardelli L. 5596
Ginsburg S. 5506
Girschick M. A. 5707 РЕЦ, 5710 К
Glansdorff P. 5653
Gleason A. M. 5673
Gloess P. F. M. 5915 II
Goldman S. 5717 К
Goldstein J. S. 5666
Goodstein R. L. 5423, 5515 РЕЦ
Graesser R. F. 5878
Grant A. M. 5690
Gray C. A. M. 5606
Greenwood R. E. 5673
Grossmann A. 5508
Grothendieck A. 5663
Grüss G. 5634 К
Gumowski I. 5639
Gupta H. 5436
Gustin W. M. 5763

H

Hacht W. H. v. 5901 II
Haldane J. B. S. 5686
Hall M, Jr. 5695
Hallmark C. E. 5888 II
Hallowell A. L. 5875
Hamaker H. C. 5691
Hammer C. 5701 РЕЦ
Hampel R. 5373
Hanani H. 5530
Hara H. 5638
Hausen M. H. 5701 РЕЦ
Hawthorne N. F. 5904 II
Heimann R. 5820
Heller B. 5570
Hellinger E. 5621 К
Henkin L. 5426
Heron K. M. 5899 II
Herstein I. N. 5452
Hesse M. B. 5431 РЕЦ
Hilbert D. 5620 К
Hille E. 5534
Hilton P. J. 5488, 5495 К
Hogben L. 5398 К
Hoheisel G. 5507
Holecek K. 5869
Holland E. O. 5889 II
Homoródi L. 5813
Hopf E. 5579, 5580
Houthakker H. S. 5805
Hua Loo-keng 5472
Humbert P. 5414
Hunt G. A. 5671
Hunziker H. 5795
Hurwitz W. N. 5701 РЕЦ
Hyrenius H. 5684

I

Inagaki T. 5484
Inzinger R. 5720
Isaacs G. L. 5649
Izumi S. I. 5518, 5519

J

Jackson W., Jr. 5890 II
Jacobsthal E. 5453
Jakobson M. J. 5917 II
Jambunathan M. V. 5702 РЕЦ
Janković Z. 5557
Jensen K. H. F. 5918 II
Johansson I. 5428 К
Johnson R. B. 5906 II
Jónsson B. 5476

K

Kahane A. 5631
Kametani 5498
Kamke 5812
Kang Chi Lung 5597
Kárteszi F. 5419 РЕЦ
Kaufman H. 5575, 5657
Keck G. 5796
Keller J. B. 5607
Kendall M. G. 5698 К
Kervaire M. 5490
Kestin J. 5602
Khanna G. 5545
Kinoshita S. 5483
Kleene S. C. 5430 РЕЦ
Klein F. 5397 К
Kobayashi S. 5764
Kobold F. 5736
Komatu Y. 5577
Kommerell K. 5734 К, 5735 К
Kořinek V. 5372
Králik D. 5497
Krickeberg K. 5501
Krull W. 5457
Krzyżański M. 5616 К
Ku Y. H. 5562
Kuratowski C. см. Kuratowski K.
Kuratowski K. 5371, 5485
Kushwaha R. S. 5590

L

Lambe C. G. 5706 РЕЦ
Lampariello G. 5615
Lankford F. G., Jr. 5396 К
Lawrence J. A. 5899 II
Layton J. M. 5914 РЕЦ
Lemoine S. 5759
Lenoir M. 5767
Lepage Th. H. 5776
Lermer A. S. 5910 II
Levey E. 5833
Lévy J. 5617 РЕЦ
Levine D. 5909 II
Lévy P. 5672
Libois L. J. 5915 II
Loś J. 5512
Loster C. 5551
Lukacs E. 5668
Łukasiewicz J. 5429 К

M

McCarthy J. 5626
Macdonald N. 5880
Madow W. G. 5701 РЕЦ, 5702 РЕЦ
Magnus W. 5560
Mahler K. 5470
Malmros G. V. A. 5895 II
Manara C. F. 5727
Mann H. B. 5675 К
Mauler H. 5474
Mavrodin E. 5726
May K. O. 5724
Mayer-Kalkschmidt J. 5542
Meinardus G. 5432
Mendes M. 5622
Meyer-Eppler W. 5714
Michael E. 5481
Milnor J. 5777
Minkiewicz J. 5791
Minorsky N. 5592
Modona L. N. 5568
Mohr E. 5533
Moran P. A. P. 5689
Moreau J. J. 5762
Moritz K. 5656
Moroney M. J. 5707 РЕЦ
Morton J. A. 5858
Mostowski A. 5371, 5442 К
Müller H. R. 5738

N

Nádenik Z. 5375
Nagao H. 5460
Nair K. R. 5694
Nakayama T. 5460
Neumann B. H. 5465
Newman D. 5706 РЕЦ
Nicolau E. 5614
Noguchi H. 5482
Northcott D. G. 5471
Novák J. 5480
Nozick S. 5817
Nucci P. 5871

O

Ostrowski A. 5783
Otter R. 5708
Owens H. L. 5854

P

Palamà G. 5642
Papy G. 4579
Parodi M. 5445
Peters J. 5804 РЕЦ
Peyerimhoff A. 5637
Pini B. 5619
Pipes L. A. 5559
Plans A. 5486
Poledna V. 5654
Pöschl K. 5561
Potts R. B. 5678
Pozzolo Ferraris G. 5732
Prachar K. 5376
Prais S. J. 5805
Predonzan A. 5790
Purcell E. W. 5787

Q

Quenouille M. H. 5703 РЕЦ, 5704 РЕЦ

R

Rademacher H. 5502
Rådström H. 5550
Ramsayer K. 5865, 5866
Reeve W. D. 5392
Reidemeister K. 5494 К
Retallack J. B. 5919 II
Rhodes F. S. 5893 II
Rice F. B. 5900 II
Richert H.— E. 5435
Riguet J. 5455
Roberson R. E. 5563
Rose A. 5425
Rosen S. 5549
Rudin W. 5541

S

Saarnio U. 5514 К
Saddler W. 5741
Saibel E. 5786
Saint André R. de 5822
Sakurai A. 5608
Samelson H. 5489
Sandon F. 5706 РЕЦ
Sanielevici S. 5441
Sawyer H. A., Jr. 5908 II
Sawyer W. W. 5741
Scheffé H. 5693
Schiek H. 5456
Schmidt H. 5635 К
Schmidt J. 5507
Schoeneberg B. 5437
Schubert H. 5399 К
Schütte K. 5421

Schwabhäuser W. 5424
Schwenkhagen H. F. 5648
Sedláček J. 5401 **РЕЦ**
Sedmak V. 5775
Segal I. E. 5665
Segre B. 5752
Selfridge R. G. 5527
Selgin P. J. 5846
Shah S. M. 5545
Shenton L. R. 5647
Sikorski R. 5664
Simpkin K. H. 5810
Skolem Th. 5422
Slatter W. C. G. 5821
Slebodziński W. 5765
Smart J. J. C. 5427
Smith E. M. 5907 **II**
Smith R. C. T. 5800
Spiegel M. R. 5630,5636
Stange K. 5715
Stanley J. P. 5803 **РЕЦ**
Stark M. 5442 **К**
Stečkin S. B. 5525
Steinhaus H. 5401 **РЕЦ**
Steinhauser F. 5804 **РЕЦ**
Sternberg R. L. 5575, 5657
Stoka M. G. 5725
Stoll W 5553
Strobakken H. 5912 **II**
Straszewicz S. 5505
Ströle D. 5593, 5594
Sundrum R. M. 5680
Sunouchi G. 5521, 5640
Sunyer i Balagner F. 5528, 5546
Swain R. L. 5722
Sydler J.-P. 5731
Szász P. 5745

T

Tachibana, 5760
Takács J. 5650
Thaler G. J. 5914 **РЕЦ**
Thimm W. 5552
Thomas A. 5893 **II**
Thomason T. H. 5823
Thurston H. S. 5440, 5753
Tocher K. D. 5705 **РЕЦ**
Toeplitz O. 5621 **К**
Togliatti E. 5413
Toscano L. 5644
Toth E. 5406
Tranter C. J. 5652 **РЕЦ**
Trevisan G. 5466
Tricomi F. G. 5645
Truesdell C. 5409
Tsuchikura T. 5522

U

Ungar P. 5774
Unger G. 5755

V

Vaart H. R. van der 5683
Van der Pol B. 5641
Van der Waerden B. L. 5681, 5682
Vaněk J. 5604, 5605
Varga O. 5407
Vaughan H. E. 5491
Veverka A. 5570
Viola T. 5523
Virtanen K. G. 5548
Vogel Th. 5569
Volpato M. 5576

W

Waadeland H. 5454
Wagner C. 5780
Walsh J. L. 5537, 5538, 5779
Watanabe H. 5511
Watson Th. J. 5894 **II**
Waugh A. E. 5705 **РЕЦ**
Waugn F. V. 5785
Weber H. 5874
Wegner U. 5449, 5781
Weinberg L. 5447
Weiser J. 5911 **II**
Weiss L. 5697
Westcott J. H. 5914 **РЕЦ**
Whitehead J. H. C. 5488
Wiener N. 5882
Wijngaarden A. van 5531
Wilkes M. V. 5803 **РЕЦ**
Williams E. J. 5688
Wilson R. 5544
Winkler S. 5817
Winogradzki J. 5768
Wisdom J. O. 5404
Wolibner W. 5520
Wolowitz W. H. 5898 **II**
Woolard S. B. 5891 **II**
Wyler O. 5742

Y

Yates R. C. 5629
Youden W. J. 5696
Young D. 5779, 5782

Z

Zakrzewski J. 5792
Zarankiewicz C. 5485
Zaremba S. K. 5602
Zol v. 5652 **РЕЦ**

北川敏男 5477
森口繁一 5677
王世強 5477
胡和生 5766
越民義 5434

Технический редактор *К. И. Игнаткова*

ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ АКАДЕМИИ НАУК СССР

принимает заказы от учреждений и лиц на изготовление фотокопий статей, рефераты которых были опубликованы в Реферативном журнале.

Фотокопии высылаются почтой с оплатой наложенным платежом или по безналичному расчету.

Заказ оформляется почтой на почтовых открытках. В заказах указываются: 1. Серия Реферативного журнала. 2. Год издания Реферативного журнала. 3. Номер реферата. 4. Количество экземпляров фотокопий. 5. Точный почтовый адрес заказчика.

Заказы направлять по адресу: Москва Д-219. Балтийский поселок, дом 42-Б, Институт научной информации АН СССР, Стол заказов.

Справки по телефону Д 7-00-10, доб. 51.